This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

**Usage guidelines**

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

**About Google Book Search**

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

**Über dieses Buch**

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

**Nutzungsrichtlinien**

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

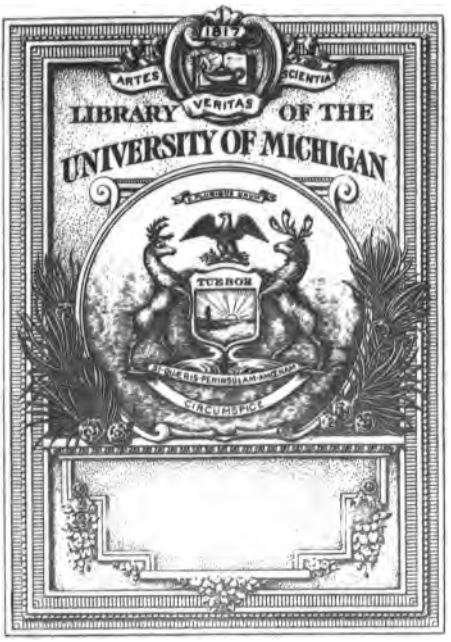
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

**Über Google Buchsuche**

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.




THE GIFT OF
Prof L.C. Karpinski

# DIE ARITHMETIK

DES

# ELIA MISRACHI.

EIN BEITRAG

ZUR

GESCHICHTE DER MATHEMATIK

VON

GUSTAV WERTHEIM,
PROFESSOR AN DER REALSCHULE DER ISRAELITISCHEN GEMEINDE
ZU FRANKFURT A. M.

---

**ZWEITE VERBESSERTE AUFLAGE.**

---

BRAUNSCHWEIG,
DRUCK UND VERLAG VON FRIEDRICH VIEWEG UND SOHN.
1896.

Alle Rechte, namentlich jenes der Uebersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten.

QA
27
.T9
W499
1896

Prof. L. C. Karpinski
8-9-1926.

DEM HERRN

# DIRECTOR Dr. H. BAERWALD

ZU

FRANKFURT AM MAIN

ALS

EIN ZEICHEN SEINER VEREHRUNG

DER VERFASSER.

# VORREDE.

Meine 1893 im Programm der Realschule der Israelitischen Gemeinde zu Frankfurt a. M. erschienene Arbeit „Die Arithmetik des Elia Misrachi“ hat eine so freundliche Aufnahme gefunden, dafs eine neue Auflage erforderlich geworden ist. Ich habe diese Gelegenheit dazu benutzt, eine Reihe nicht unwichtiger Verbesserungen und Vervollständigungen anzubringen. Unter anderm habe ich an einigen Stellen mathematische Entwicklungen beigefügt, welche das Verständnis solchen Lesern erleichtern sollen, die sich nicht über ihre Schulzeit hinaus mit Mathematik beschäftigt haben. Bei Angabe der vor oder kurz nach Misrachis Buch erschienenen Werke, welche dieselben oder ähnliche Aufgaben wie er behandeln, habe ich auch noch auf die Summa von Nicola Paciuolo (1494), den Anhang (Problèmes) zu Nicolas Chuquet (1484), das Rechenbuch von Johannes Widmann von Eger (1489) und die Cofs von Christoff Rudolff (1525) bezug genommen.

Frankfurt a. M., im August 1896.

**Gustav Wertheim.**

# INHALTSVERZEICHNIS.


| | | Seite |
|---|---|---|
| 1. | Einleitung | 1 |
| 2. | Quellen, aus denen Misrachi geschöpft hat | 6 |
| 3. | Zweck und Plan des Sefer-Hamispar | 11 |
| 4. | Ganze Zahlen | 16 |
| 5. | Brüche und gemischte Zahlen | 25 |
| 6. | Die astronomischen Brüche | 30 |
| 7. | Ausziehung der Quadratwurzel | 32 |
| 8. | Ausziehung der Kubikwurzel | 34 |
| 9. | Proportionen | 37 |
| 10. | Aufgaben | 39 |
| | Arithmetische Aufgaben | 42 |
| | Geometrische Aufgaben | 61 |

# 1. Einleitung.

Die Eroberung Konstantinopels durch die Türken, die dem morschen oströmischen Reiche ein Ende machte und indirekt nicht wenig zur geistigen Wiedergeburt Europas beitrug, war auch für die von den byzantinischen Kaisern geknechteten Juden ein erlösendes Ereignis; denn der Eroberer gestattete ihnen, sich frei in den Städten seines Reiches niederzulassen und Synagogen und Schulen zu errichten.

Es war das ein um so gröfseres Glück, als zu dieser Zeit die Verfolgungen und Bedrückungen der Juden in den übrigen europäischen Ländern immer heftiger wurden, bis sie in der brutalen Austreibung aller Juden aus Spanien (1492) und Portugal (1496) ihren Gipfel erreichten. Die Sultane Bajazet, Selim I. und Soliman I. nahmen die flüchtigen Juden mit grofser Zuvorkommenheit auf und räumten ihnen dieselbe Freiheit ein, welche andere Völker, wie die Armenier und Griechen, genossen. Die Juden kamen aber auch wie gerufen; denn die Türken, die in den Künsten des Friedens wenig erfahren waren, mochten den im Lande wohnenden Christen nicht trauen, aber auf die Dankbarkeit und Treue der Juden konnten sie unbedingt zählen, und letztere, namentlich die aus Spanien eingewanderten, hatten gerade die Eigenschaften, die den Türken abgingen. Daher war bald nicht blofs die Schifffahrt und der gesamte Handel in ihren Händen, sondern sie trieben auch Handwerke und Künste; sie verfertigten Rüstungen und Waffen, gossen Kanonen, fabrizierten Pulver und lehrten die Türken damit umzugehen. Auch als Dolmetscher und diplomatische Unterhändler wurden die infolge

ihrer vielen Wanderungen völker- und sprachenkundigen Juden im türkischen Reiche verwandt.

Schon der Sultan Mohammed II. hatte bald nach der Besitzergreifung Konstantinopels einen jüdischen Oberrabbiner für alle türkischen Gemeinden in der Person des gelehrten und tüchtigen Mose Kapsali ernannt, den er sogar in den Divan berief und dadurch besonders auszeichnete, dafs er ihm den Platz neben dem Mufti anwies und ihm den Vortritt vor dem griechischen Patriarchen, dem Oberhaupt sämtlicher Griechen seines Reiches, einräumte. Das Amt dieses Oberrabbiners war ein ungemein wichtiges. Er verteilte die Steuern, welche die Juden einzeln oder gemeindeweise zu zahlen hatten, liefs die Gelder einziehen und in die Kasse des Sultans abliefern; er bestätigte die Rabbiner und hatte gewisse Strafbefugnisse über sämtliche Gemeindemitglieder.

Als Mose Kapsali 1495 starb, übernahm Elia Misrachi das Oberrabbinat und bekleidete dasselbe bis zu seinem 1526 erfolgten Tode. Er war um 1455 geboren und stammte wahrscheinlich aus einer in Konstantinopel eingewanderten griechischen Familie. Ein Schüler des Rabbiners Juda Menz aus Padua, war er ein tiefer Talmudkundiger und ein streng frommer Mann. In seiner Jugend war er ein Heifssporn gewesen. So hatte er 1487 einen Abgesandten der Jerusalemer Gemeinde, der angeblich für den Bau einer Synagoge, in Wirklichkeit für die Taschen der Vorstandsmitglieder Gelder sammeln wollte, einfach von der Kanzel gewiesen. Ebenso hatte er um dieselbe Zeit die Wiedervereinigung der Rabbaniten mit den Karäern, die von Gelehrten beider Richtungen erstrebt wurde, in einer Schrift lebhaft bekämpft. Später war er milder gegen die Karäer gesinnt, und als einige Überfromme unter den Rabbaniten das Verhältnis gegenseitiger Duldung, das sich im Laufe der Zeit zwischen beiden Parteien gebildet hatte, mit Gewalt stören wollten, entwickelte er in einer Schrift, dafs das Abstofsen der Karäer ungerecht sei, und dafs man nicht blofs das Recht, sondern sogar die Pflicht habe, die Karäer als Juden zu behandeln. Ob das Alter ihn zu gemäfsigteren Ansichten gebracht, oder ob die hohe Stellung, zu der er emporgestiegen war, seinen Blick erweitert hatte, so dafs ihm jetzt nebensächliche Differenzen minder wichtig als früher erschienen, wird sich schwer entscheiden lassen. Wahrscheinlich haben beide Umstände vereint sein Auftreten

gegen religiöse Intoleranz veranlafst. Sicherlich hat aber einen mäfsigenden Einfluſs auf sein Urteil auch seine Beschäftigung mit profanen Wissenschaften geübt, die er eifrig pflegte, obwohl er sich als strenggläubiger Rabbanit in erster Linie mit der Religionswissenschaft beschäftigte, die er durch umfangreiche, noch jetzt geschätzte Werke [1]) förderte.

Besonders eifrig wurden in der zweiten Hälfte des 15. Jahrhunderts von den Juden in Konstantinopel mathematische Studien betrieben. Später scheint dieser Eifer nachgelassen zu haben; wenigstens klagt Josef Salomo Del Medigo (1591—1657) aus Candia, der aufser Theologie und Medizin auch Mathematik und Astronomie studiert hatte, ein Schüler Galileis, in einem in mehrfacher Hinsicht höchst interessanten Briefe an Serach ben Nathan den Karäer in Troki darüber, dafs die Rabbiner so wenig Interesse für Mathematik bekundeten: „In alten Zeiten, als die Propheten treue Hirten waren, da gab es Weise und Einsichtsvolle in Israel, alle Kenntnis war ihnen eigen, die Sternkunde war selbst den Schwachen bekannt, die Mathematik umrankte mit ihren einzelnen Zweigen, der Musik, Arithmetik, Algebra und Astronomie, das Gotteshaus. Aber jetzt ist die Kunde davon schwach.“ Und später sagt er: „Die meisten jüdischen Gelehrten empfinden alsbald Widerwillen gegen diese hohe Wissenschaft, nachdem sie kurz zuvor nach ihr sich gesehnt und ihr Studium begonnen haben, weil der Vorbereitungen dazu viele und die Lehrsätze oft schwierig sind, indem man erst mittels der Arithmetik und Geometrie zur Astronomie sich erheben kann. Kurz, die Masse der Rabbinen versteht in unseren Tagen von den Himmelskörpern gerade soviel wie Ochs und Esel.“ In demselben Briefe zählt er dann die hebräischen Werke mathematischen und astronomischen Inhalts auf, die er selbst in seiner Bibliothek besitze, und bemerkt unter anderem: „Der gelehrte und würdige Mardochai Comtino verfafste mehrere Schriften nach Anleitung derer des Abraham ibn Esra, erklärte auch

---

[1]) ספר אלירה מזרחי על התורה, Superkommentar über Raschis Kommentar zum Pentateuch, ein oft gedrucktes Werk, von dem auch Auszüge erschienen sind. Erste Ausgabe. Venedig 1527.

שו"ת מים עמוקים. 39 Gutachten über halachische Gegenstände. Venedig 1647.

שאלות ותשובות. Sammlung von 100 Gutachten. Konstantinopel 1559 — 1561.

dessen Schriften alle; sein Schüler, der berühmte Elia Misrachi, schrieb Kommentare zu den Elementen des Euklid, auch zu einem Teile des Almagest[1]), und verfaſste das Sefer-Hamispar, welches von allen, die es kennen und verstehen, sehr geschätzt wird." (Abraham Geiger, Melo Chofnajim, p. 11 ff.)

Die Erläuterungen zu den Elementen Euklids und zum Almagest scheinen verloren zu sein; nur das Sefer-Hamispar ist auf uns gekommen. Es ist 1534, also acht Jahre nach dem Tode des Verfassers, in Konstantinopel in der berühmten Druckerei von Soncino gedruckt worden. Der vollständige Titel lautet:

ספר המספר לתחכם האלהי מהר"ר אליה המזרחי ז"ל בקוסטנטינא קריית אדוננו
המלך הגדול והאדיר שולטאן שולימאן בשנת שתים עשרה למלכו

(„Buch der Zahl des Theologen Elia Misrachi sel. Andenkens in Konstantinopel, der Stadt unseres Herrn, des grofsen und mächtigen Königs Sultan Soliman, im zwölften Jahre seiner Regierung.")

Zu dieser Zeit waren eine ganze Reihe christlicher Gelehrter, durch Reuchlin angeregt, mit dem Studium der hebräischen Sprache und Litteratur beschäftigt. Man hatte erkannt, daſs die Bibel ohne Kenntnis des Hebräischen ein verschlossenes Buch bleiben werde, und daher wurden an allen Universitäten Lehrstühle für die hebräische Sprache errichtet und Lehrer derselben gesucht. Einer der hervorragendsten Gelehrten der Zeit war Sebastian Münster aus Ingelheim, der seit 1529 in Basel Hebräisch und Theologie lehrte und eine grofse schriftstellerische Thätigkeit entfaltete. Ihm wurde (jedenfalls vor 1544) von seinem Freunde Erasmus Oswald Schreckenfuchs, der in Tübingen mit dem Lehramte der hebräischen Sprache betraut war und später ebenfalls in Basel Hebräisch, Mathematik, Astronomie und Rhetorik lehrte, ein Exemplar des Sefer-Hamispar und 1544 das Sefer-Zuras-Haarez (Buch von der Gestalt der Erde) des Abraham bar Chijja[2]) übersandt. Münster, der

---

[1]) Das berühmte Werk *μεγάλη σύνταξις* (grofse Zusammenstellung) des Klaudius Ptolemaeus (125 n. Chr.), welches in 13 Büchern die unter dem Namen des ptolemäischen Weltsystems bekannte Lehre von den Bewegungen der Gestirne entwickelt, hat später, als es ins Arabische übersetzt wurde, durch Zusammensetzung des arabischen Artikels al mit dem griechischen Superlativ *μέγιστος* den Namen Almagest erhalten, mit welchem es noch heute gewöhnlich bezeichnet wird.

[2]) Ein spanischer Rabbiner, um 1070 geboren, der verschiedene mathematische und astronomische Werke verfaſst hat.

das letztere Werk mit seinen Zuhörern lesen und „denselben die schwierige Arbeit, sich eine Abschrift zu machen, ersparen wollte, veranstaltete für seinen und der Professoren anderer Universitäten Gebrauch“ einen Auszug aus beiden Werken, den dann Schreckenfuchs ins Lateinische übersetzte. Text und Übersetzung sind, in einem Quartbande vereinigt, 1546 bei Henricus Petrus in Basel erschienen. Der hebräische Text umfafst 352 Seiten; die ersten 211 enthalten die Schrift des Abraham bar Chijja; hier hat Münster dem Texte überall erläuternde Randbemerkungen in lateinischer Sprache beigefügt. Der Rest des Werkes giebt einen dürftigen Auszug aus den beiden ersten Teilen des Sefer-Hamispar; von Seite 213 bis 264 sind ebenfalls lateinische Randbemerkungen Münsters vorhanden, von Seite 264 bis zum Schlufs nicht mehr. Die besonders paginierte lateinische Übersetzung, die auch ein eigenes Titelblatt hat, umfafst 207 Seiten, und zwar beziehen sich die ersten 110 auf das Sefer-Zuras-Haarez, der Rest auf das Sefer-Hamispar.

Münster war, wie er in der Vorrede darlegt, glücklich, diese beiden Bücher erhalten zu haben, denn jetzt könne er mit seinen Zuhörern einmal etwas anderes als Schriften der Bibel lesen und die Behauptung widerlegen, die Juden seien jeder wissenschaftlichen Thätigkeit entfremdet, und man fände bei ihnen nichts als leere Traditionen und talmudischen Unsinn.

Im Laufe der Zeiten ist nun sowohl die Originalausgabe wie der Münstersche Auszug eine buchhändlerische Seltenheit geworden[1]). In neuerer Zeit hat Dr. M. Steinschneider sich mit Misrachis Buch beschäftigt. Als Antwort auf eine Anfrage des um die Geschichte der Mathematik hochverdienten Fürsten Baldassarre Boncompagni in Rom, ob ein jüdischer Schriftsteller sich mit der Summation der Reihe $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$ beschäftigt habe, hat er nicht nur die auf diesen Gegenstand bezüglichen Stellen nebst der ganzen Einleitung des Sefer-Hamispar (ins Italienische) übersetzt, sondern auch allgemeine interessante Mitteilungen über das Werk gemacht und nament-

---

[1]) Ein im Jahre 1809 in Lemberg erschienenes Rechenbuch, das den Titel חושבן מלאכת führt, behandelt nach Misrachi, dessen Name auf dem Titelblatte angegeben ist, „das Rechnen mit ganzen Zahlen und Brüchen, das Rechnen in der Geometrie und Astronomie, das Ausziehen der Quadrat- und Kubikwurzeln aus ganzen Zahlen und Brüchen“. Daran schliessen sich „umfassende und neue Belehrungen über das Schachspiel“.

lich das Verhältnis, in welchem der Münstersche Auszug zum Original steht, mit gewohnter Gründlichkeit dargelegt. Aber diese Arbeit, die 1866 in Rom erschienen ist, kann in dem Leser nur den Wunsch rege machen, mehr von dem interessanten Buche zu erfahren, und daher habe ich es für angezeigt gehalten, durch eine kurze Analyse des Werkes die Aufmerksamkeit von neuem auf dasselbe zu lenken.

## 2. Quellen, aus denen Misrachi geschöpft hat.

Ehe ich mich zum Inhalt des Buches selbst wende, will ich einige Worte über die Schriftsteller vorausschicken, deren Werk Misrachi bei seiner Arbeit benutzt hat.

In erster Linie ist hier Abraham ibn Esra (1093—1167) aus Toledo zu nennen, jener grofse, von Christen und Juden gefeierte Gelehrte, welcher aufser vielen anderen Schriften ein kleines arithmetisches Werk verfafst hat, das ebenfalls den Titel „Sefer-Hamispar“ führt, und das bis vor kurzem nur handschriftlich vorhanden war. Erst im vorigen Jahre ist eine von Dr. Moritz Silberberg besorgte Ausgabe (Text und deutsche Übersetzung) im Druck erschienen (Verlag von J. Kauffmann, Frankfurt a. M. 1895). Misrachi hat aus Abraham ibn Esra, den er an mehreren Stellen ausdrücklich nennt, im theoretischen Teile manches entlehnt, und von den 100 Aufgaben, die den dritten Teil seines Werkes ausmachen, sind 21 gröfstenteils wörtlich aus Abraham ibn Esra entnommen.

Ferner hat Misrachi sowohl aus griechischen, als auch aus arabischen Werken geschöpft. Dafs er griechische Schriftsteller im Original oder in arabischen Übersetzungen benutzt hat, erhellt aus seiner Darstellung verschiedener Theorieen, z. B. der Proportionen; er erwähnt aber auch ausdrücklich hin und wieder Nikomachus von Gerasa (um 100 n. Chr.), sowie dessen Werk ἀριθμητικὴ εἰσαγωγή, und an sehr vielen Stellen Euklid (um 300 v. Chr.), auf den er sich entweder ganz allgemein oder unter Angabe bestimmter Sätze bezieht. Ob er seine stereometrischen Kenntnisse aus Heron von Alexandrien (um 100 v. Chr.) direkt oder aus einem von Heron abhängigen griechischen oder arabischen Schriftsteller geschöpft hat, wird sich kaum ermitteln lassen.

Den Arabern sind der gröfste Teil seiner Aufgaben, die Bruchrechnung, die Methoden der Wurzelausziehung und die Auflösung der quadratischen Gleichung entnommen. Die Lösung der gemischt quadratischen Gleichung ist schon in dem 6. Satze des II. Buches der Elemente Euklids enthalten, der in geometrischer Form die Formel

$$(a + b)\, b + \frac{1}{4}\, a^2 = \left(\frac{1}{2}\, a + b\right)^2$$

giebt. 200 Jahre nach Euklid ist Heron (ed. Friedr. Hultsch, p. 133) durch die Aufgabe: „Aus der Summe des Durchmessers, der Peripherie und des Flächeninhalts eines Kreises jede dieser Zahlen einzeln zu bestimmen", zu einer solchen Gleichung geführt, und seine Lösungsart stimmt mit dem Verfahren, welches Diophant (um 300 n. Chr.) einschlägt, ganz überein. Die Griechen führen nämlich die Gleichung $a\,x^2 + b\,x = c$ nicht durch Division mit $a$ auf die Form $x^2 + m\,x = n$ zurück, sondern sie multiplizieren mit $a$ (wohl um lästige Brüche zu vermeiden), wodurch sie $a^2x^2 + ab\,x = ac$ oder $(ax)^2 + b\,(ax) = a\,c$ erhalten. Aus dieser Gleichung folgt zunächst

$$ax = -\frac{b}{2} + \sqrt{ac + \left(\frac{b}{2}\right)^2},$$

und dann ergiebt sich durch Division mit $a$ der Wert von $x$ selbst.

Auf diese Weise werden, wenn $b$ eine gerade Zahl ist, Brüche überhaupt vermieden. Ist aber $b$ ungerade, so treten Brüche mit dem Nenner 2, resp. 4 auf. Um auch diese zu vermeiden, multiplizieren die Inder die vorgelegte Gleichung $ax^2 + bx = c$ von vornherein mit $4\,a$; aus der so erhaltenen Gleichung $(2\,ax)^2 + 2\,b\,.\,2\,ax = 4\,ac$ bestimmen sie dann zunächst den Wert von $2\,ax$, darauf durch Division mit $2\,a$ den Wert von $x$. Die Araber dagegen bewirken wie die Neueren durch Division, bezw. Multiplikation, dafs $x^2$ den Koefficienten 1 habe, und gehen erst dann an die Auflösung. So macht es auch Misrachi.

Ebenso mufs er natürlich, da die negativen Zahlen sich zu seiner Zeit noch nicht das Bürgerrecht erworben hatten, drei verschiedene Fälle der Gleichung zweiten Grades, nämlich $x^2 + ax = b$, $x^2 = ax + b$, $x^2 + b = ax$, unterscheiden und jeden Fall einzeln behandeln.

Seine Abhängigkeit von den Arabern zeigt sich aber in noch einem dritten Punkte, der besonders charakteristisch ist.

Während wir gewohnt sind, bei jeder Gleichung zweiten Grades die Unbekannte $x$ selbst zu bestimmen, und dann, falls nach $x^2$ gefragt sein sollte, den gefundenen Wert von $x$ mit sich selbst zu multiplizieren, haben die Araber ein besonderes Verfahren gelehrt, welches $x^2$ direkt liefert. Um z. B. die Gleichung $x^2 + ax = b$ für $x^2$ zu lösen, multiplizieren sie mit $a^2$ und erhalten $a^2x^2 + a^3x = a^2b$ oder $(ax)^2 + a^2(ax) = a^2b$; daraus folgt dann

$$(ax)^2 + a^2(ax) + \left(\frac{a^2}{2}\right)^2 = a^2b + \frac{a^4}{4}$$

und

$$ax + \frac{a^2}{2} = \sqrt{a^2b + \frac{a^4}{4}}.$$

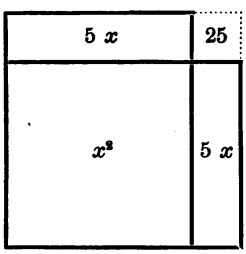
Andererseits giebt die vorgelegte Gleichung, wenn beiderseits $\frac{a^2}{2}$ addiert wird, $x^2 + ax + \frac{a^2}{2} = b + \frac{a^2}{2}$, und durch Subtraktion der vorletzten von der letzten Gleichung folgt

$$x^2 = b + \frac{a^2}{2} - \sqrt{a^2b + \frac{a^4}{4}}.$$

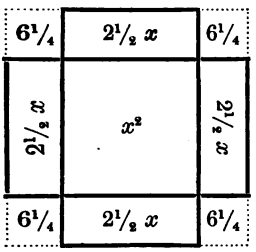
Ganz so verfährt Misrachi, wie man unten sehen wird.

Die Behandlung der quadratischen Gleichung seitens der Araber zeigt noch eine andere Eigentümlichkeit. Sie erläutern in ihren theoretischen Werken die Lösung oder vielmehr „beweisen die Richtigkeit“ derselben durch eine geometrische Figur.

Um z. B. die Gleichung $x^2 + 10x = 39$ zu lösen, zeichnen sie ein Quadrat mit einer unbekannten Seite $x$ und legen an jede von zwei zusammenstofsenden Seiten ein Rechteck von der Breite $\frac{10}{2} = 5$. Die so entstandene Figur wird durch die punktierten Linien zu einem Quadrat vervollständigt, dessen Seite $x + 5$ ist. Nun ist aber das zuletzt angesetzte Flächenstück ein Quadrat, dessen Seite 5 ist, das also den Flächeninhalt 25 hat, und da die drei anderen Flächenstücke $x^2$, $5x$, $5x$ die Summe 39 haben, so hat das ganze Quadrat die Fläche $39 + 25 = 64$. Es mufs daher $x + 5 = 8$, also $x = 3$ sein.



Noch durch eine andere Konstruktion erläutern die Araber die Lösung. Sie setzen an jede der vier Seiten des Quadrats $x^2$




ein Rechteck von der Breite $\frac{10}{4} = 2\frac{1}{2}$; dann wird die Figur durch vier Quadrate, von denen jedes den Flächeninhalt $(2\frac{1}{2})^2 = 6\frac{1}{4}$ hat, die also zusammen $4 . 6\frac{1}{4} = 25$ betragen, zu einem Quadrat ergänzt, und da dieses Quadrat die Seite $2\frac{1}{2} + x + 2\frac{1}{2} = x + 5$, die Fläche $39 + 25 = 64$ hat, so ist wieder $x + 5 = 8$, also $x = 3$.

So anschaulich dieses Verfahren auch ist, so kann es doch nur als ein Rückschritt angesehen werden.

Schon Diophant hatte, indem er in seinem Hauptwerke — wenn man von der einen, wahrscheinlich eingeschobenen Aufgabe V, 13 absieht — immer nur mit allgemeinen Zahlenausdrücken rechnet, ohne seine Zuflucht zu geometrischen Darstellungen zu nehmen, eine von der Geometrie unabhängige Algebra geschaffen. Der Teil seines Werkes, in welchem die Auflösung der Gleichung zweiten Grades gelehrt wird, ist zwar verloren gegangen. Es ist aber nicht anzunehmen, dafs gerade dieser verhältnismäfsig jedenfalls kleine Teil in einem anderen Geiste geschrieben gewesen sei, wie die uns erhaltenen Teile des Werkes. Viel eher dürfen wir voraussetzen, die Verstümmelung der Arithmetik Diophants sei schon eingetreten, bevor dieselbe in die Hände der Araber fiel, also schon vor Mohammed Abul Wafa (940—998), der eine Übersetzung derselben angefertigt haben soll, oder jedenfalls vor Mohammed ben Alhaçan Alkarkhî, der in sein zwischen 1010 und 1016 geschriebenes, unter dem Namen Al-Fakhrî bekanntes Werk etwa 70 Aufgaben aus Diophant aufgenommen hat. Die Araber mufsten also, da ihnen eine bessere Darstellung der Sache fehlte, wieder zu der schwerfälligen geometrischen Methode Euklids zurückkehren, und ihrem Beispiele sind die christlichen Mathematiker, voran Leonardo Pisano (1202), gefolgt. Noch Rafael Bombelli verfährt auf diese Weise in der zweiten Auflage seiner 1579 in Bologna gedruckten „Algebra“.

Misrachi giebt keinen solchen geometrischen Beweis der Lösung. Ob er sich dabei nach den kurz gefafsten Rechenbüchern der Araber gerichtet, die ebenfalls von einem solchen

Beweise Abstand nehmen, wie sie überhaupt nicht auf die Begründung der Operationen eingehen, oder ob er, was mir bei der Sorgfalt, die er sonst auf die Beweise verwendet, wahrscheinlicher scheint, es für unzulässig gehalten hat, die Algebra wieder in Abhängigkeit von der Geometrie zu bringen, bleibe dahingestellt.

Obgleich nun Misrachi im wesentlichen nur das behandelt, was er aus hebräischen, griechischen und arabischen Werken entnommen hat, so ist er doch mehr als ein bloſser Compilator. Das zeigt er sowohl in der Auswahl, wie in der Behandlung des Stoffes.

Bekanntlich haben die Griechen streng zwischen Arithmetik und Logistik unterschieden. Die Arithmetik war, wie die Geometrie, geistigen Ursprungs und handelte bloſs von den Eigenschaften der Zahlen. Die Logistik war, wie die Mechanik, Astronomie, Optik, Geodäsie und Musik, sinnlichen Ursprungs und behandelte das Rechnen in seiner Anwendung auf sinnlich wahrnehmbare Gegenstände. Wie die Araber, verfährt auch Misrachi eklektisch. Im ganzen ist sein Sefer-Hamispar, wie wir sehen werden, ein Lehrbuch der Logistik. Die Anwendungen sind ihm die Hauptsache. Er verweilt nicht bei der von Nikomachus gegebenen Dreiteilung der geraden Zahlen (ἄρτιοι ἀριθμοί) in gerademal-gerade (ἀρτιάκις ἄρτιοι), d. i. solche, welche bei fortgesetzter Halbierung den Quotienten 1 geben; gerademal-ungerade (ἀρτιοπέριττοι), d. i. solche, deren Hälfte eine ungerade Zahl ist, und ungeradem al-gerade (περισσάρτιοι), d. i. solche, deren Hälfte zwar noch gerade ist, die aber bei fortgesetzter Halbierung einen von 1 verschiedenen Quotienten geben. Ebenso erwähnt er bloſs die so höchst unlogische Einteilung, welche dieser auf Dreiteilungen versessene Schriftsteller mit den ungeraden Zahlen (ἀριθμοὶ περισσοί) vornimmt, die bei ihm in Primzahlen (πρῶτοι καὶ ἀσύνθετοι), zusammengesetzte Zahlen (δεύτεροι καὶ σύνθετοι) und drittens Zahlen zerfallen, die an sich zusammengesetzt und in Beziehung auf einander teilerfremd sind. Misrachi erklärt ausdrücklich, daſs „diese Einteilungen nicht auf dem Wege zu dem Ziele liegen, das er sich gesteckt“. Auch die figurierten Zahlen behandelt er nicht. Die vollkommenen Zahlen waren für ihn als Theologen von Interesse, und er beschäftigt sich mit ihnen in Anlehnung an Nikomachus. Die auf denselben Principien beruhenden befreundeten Zahlen

dagegen, mit denen sich besonders die Araber beschäftigt hatten, übergeht er mit Stillschweigen.

Dieselbe Selbstständigkeit des Urteils, die er in der Wahl des Stoffes bekundet, zeigt er auch in der Darstellung. Überall geht er der Sache auf den Grund und kommt dadurch zuweilen, wie wir unten sehen werden, zu ganz originellen Beweismethoden.

## 3. Zweck und Plan des Sefer-Hamispar.

Das Sefer-Hamispar, zu dessen Betrachtung ich mich nach diesen Vorbemerkungen jetzt wende, ist ein Quartband von 110 Blättern. In demselben sind nicht die Seiten, sondern nur die Bogen numeriert; der Kürze halber werde ich aber in meinen Hinweisungen immer die betreffenden Seiten angeben. Der Umstand, dafs das Werk erst nach dem Tode des Verfassers gedruckt worden ist, hat zahlreiche Ungenauigkeiten veranlafst, die ich, soweit es erforderlich war, stillschweigend berichtigt habe.

In der Einleitung giebt Misrachi eine Einteilung der Wissenschaften: Theologie, Mathematik und Naturwissenschaft, und bespricht deren Verhältnis zu einander. Die Gegenstände der Theologie, der göttlichen Wissenschaft, sind frei und unabhängig von jeder Materie, die Gegenstände der beiden anderen Wissenschaften nicht, sondern sie sind entweder mit einer sinnlich wahrnehmbaren Materie notwendig verbunden, so dafs der Gedanke sie nicht ohne dieselbe erfassen kann, wie Mensch, Pflanze u. s. w. (Naturwissenschaft), oder sie können vom Verstande ohne sinnlich wahrnehmbare Materie begriffen werden, wenngleich sie ohne eine solche nicht ins Dasein treten können, wie Dreieck, Quadrat u. s. w. (Mathematik). Danach nimmt die Mathematik eine vermittelnde Stellung zwischen der Theologie und der Naturwissenschaft ein und verdient die gröfste Aufmerksamkeit. Sie ist gleichsam eine Brücke, über welche unser Gedanke von den sinnlich wahrnehmbaren Dingen, mit denen wir von Kindheit an vertraut sind, zu den geistigen schreitet, an die unsere Sinne nicht gewöhnt sind, und die in ihrer Feinheit unseren Seelen gleichen. Nur durch die Mathematik führt der Weg zur Erkenntnis der Dinge.

Von den vier Teilen der Mathematik: Arithmetik, Geometrie, Astronomie und Musik, sind die beiden ersten die allgemeineren

und daher wichtigeren, und da die Geometrie die Arithmetik voraussetzt und ihrer bei der Ausmessung der Dreiecke oder Vierecke oder Achtecke u. s. w. bedarf, während die Arithmetik von der Geometrie ganz unabhängig ist, so mufs die Behandlung der Arithmetik derjenigen der anderen Wissenschaften vorausgehen.

Misrachi setzt dann auseinander, was ihn bewogen habe, den Gegenstand, über den schon die früheren Gelehrten geschrieben, aufs neue zu behandeln. Dieselben hätten, sagt er, nur das Verfahren zur Lösung der Aufgaben und dessen Abkürzungen gelehrt, nichts weiter. Wenn aber den Schülern die Gründe der Methoden unbekannt blieben, so lernten sie nur die Verfahrungsarten des einen Verfassers kennen, dem sie folgten, diejenigen anderer Schriftsteller blieben ihnen verschlossen, und noch weniger würden sie befähigt, selbst Methoden zu erfinden und Aufgaben zu lösen, mit denen sie sich vorher nicht beschäftigt hätten.

Dazu käme noch ein anderer Grund, nämlich die Liebe zu seinen teuren Schülern, die ihn gebeten hätten, für sie ein Buch zu schreiben, welches alle von den früheren Schriftstellern befolgten Methoden mit ihren Gründen und Beweisen lehre. Deshalb habe er dieses Werk verfafst, das vielleicht auch manchem Gelehrten Arbeit ersparen und dadurch von Nutzen sein werde. Man werde in dem Buche auch neue Methoden finden, die er selbst ersonnen habe. Es sei zwar nicht zu erwarten, dafs er alle Wege anzeige, die zur Lösung der Aufgaben überhaupt möglich seien; aber mittels der Gründe und Beweise, die er gebe, werde der Leser die Kunstgriffe aller Schriftsteller und ihre Grundlagen begreifen und, wenn Gott ihn durch Verleihung von Verstand begünstigt habe, deren neue erfinden können.

Nachdem er sodann den Zweck der Arithmetik dargelegt, geht er zur Definition der Zahl über, die einer Einteilung der Zahlen vorangehen müsse. Die von den früheren Schriftstellern gegebene Definition: „Die Zahl ist eine Vereinigung von Einheiten“ entspreche, setzt er auseinander, nicht den Forderungen der Logik. Nach ihm ist die Zahl eine diskrete Gröfse (zum Unterschiede von den kontinuierlichen Gröfsen: Linie, Fläche, Körper, Raum und Zeit), deren Mafs die Einheit ist.

Die Zahlen zerfallen in solche, welche jede für sich allein verständlich sind, und solche, welche, um verstanden zu werden,

einer anderen Zahl bedürfen, mit der sie verglichen werden. Die erste Art sind die ganzen Zahlen, die zweite Art die Brüche, und die Verbindung beider erzeugt noch eine dritte Art, die gemischten Zahlen.

Nach einer Aufzählung der verschiedenen Anwendungen der Arithmetik (im Handel; bei der Ausmessung von Ebenen und Körpern; für viele Gegenstände der Geometrie, die man wissen mufs, um bei der Teilung von Häusern und Höfen sich vor Unterdrückung und Beeinträchtigung zu schützen und jedem das Seine zu geben; zur Bestimmung der Bewegungen der Gestirne, von denen die Monate und Feste abhängen u. s. w.) legt Misrachi dar, dafs es im Grunde nur drei Rechnungsarten gebe: die Addition, die Subtraktion und die Division. Wenn nämlich nur eine Zahl vorliege, so sei von einer Rechnung keine Rede. Eine solche setze zwei Zahlen voraus, und zwar könne die eine Zahl entweder um die andere vermehrt oder um die andere vermindert werden, oder endlich es könne das Verhältnis der einen zur anderen genommen werden. Die Multiplikation sei nichts als eine Addition gleicher Zahlen und nur zur Abkürzung der Schreibweise als besondere (vierte) Rechnungsart eingeführt. Jede dieser vier Rechnungsarten könne mit jeder der genannten drei Zahlenarten (Ganze, Brüche, gemischte Zahlen) vorgenommen werden.

Die Verdoppelung und Halbierung[1]) würden von einigen älteren Schriftstellern mit Unrecht als besondere Rechnungs-

[1]) Das uns so einfach erscheinende Multiplizieren zweier ganzer Zahlen ist das Ergebnis einer Jahrhunderte langen Thätigkeit des menschlichen Geistes. In dem durch August Eisenlohr unserem Verständnis erschlossenen Papyrus Rhind, dessen Entstehung bis 2000 v. Chr. hinauf reicht, ist jede Multiplikation durch successive Verdoppelungen und eine darauf folgende Addition ersetzt; auch ein Dividieren kommt noch nicht vor, sondern es wird der Divisor mit einer Reihe von Zahlen multipliziert, die so gewählt werden, dafs die Summe der Partialprodukte dem Dividend gleichkommt, und die Summe der genommenen Multiplikatoren ist dann der Quotient. Die Griechen unterschieden hinsichtlich der Multiplikation und Division eine ägyptische und eine griechische Methode, und die Vermutung liegt nahe (Paul Tannery, La géométrie grecque, p. 49), dafs die ägyptische Methode diejenige des Papyrus gewesen sei, während die griechische Methode der Multiplikation darin bestanden habe, dafs Ziffer mit Ziffer multipliziert wurde, was die Kenntnis des Einmaleins voraussetzt.

Wie dem auch sei, die Verdoppelung und Halbierung haben bis in das 16. Jahrhundert ihren Platz als besondere Rechnungsarten in vielen

arten behandelt, denn Verdoppelung sei Multiplikation mit 2 und Halbierung Multiplikation mit $^1/_2$; man nehme zwar die Multiplikation als besondere Rechnungsart an, obgleich ihr Ziel mit dem der Addition identisch sei; das geschehe aber nur, weil die Operation sich bei beiden verschieden gestalte. Die Verdoppelung und die Multiplikation stimmten aber in Ziel und Operation überein, und ebenso sei es mit der Halbierung und der Division.

Aus diesen Darlegungen ergiebt sich dann die Einteilung des Werkes in drei Abschnitte, von denen der erste die Zahlenoperationen behandelt, welche in die Arithmetik gehören, der zweite diejenigen, welche sich auf die Geometrie und Astronomie beziehen, während der dritte eine Sammlung von vollständig gelösten Rechnungsaufgaben aus den Gebieten der Arithmetik und Geometrie ist.

Die weitere Einteilung dieser Abschnitte ist aus folgender Zusammenstellung ersichtlich:

## I. Abschnitt.


| | | | |
|---|---|---|---|
| I. Pforte. Ganze Zahlen. | 1. Kap. | Addition . . . . . | Seite 9 |
| | 2. „ | Multiplikation . . . . . | „ 16 |
| | 3. „ | Subtraktion . . . . . | „ 44 |
| | 4. „ | Division . . . . . | „ 46 |
| II. Pforte. Brüche. | 1. Kap. | Multiplikation . . . . . | „ 57 |
| | 2. „ | Addition . . . . . | „ 68 |
| | 3. „ | Subtraktion . . . . . | „ 76 |
| | 4. „ | Division . . . . . | „ 82 |


---

Lehrbüchern behauptet, so noch in den Rechenbüchern des Johannes Widmann von Eger und des bekannten Adam Riese. In wissenschaftlichen Werken wird dagegen angekämpft, so von Luca Paciuoli in seiner Summa de Arithmetica [1494] fol. 19 recto, von Nicolo Tartaglia in seinem General trattato di numeri e misure [1556—1560].

Am schärfsten spricht sich Gemma Frisius in seiner 1540 erschienenen Arithmeticae practicae methodus facilis aus. Er sagt: „Solent nonnulli Duplationem et Mediationem assignare species distinctas a Multiplicatione et Divisione. Quid vero moverit stupidos illos nescio, quum et finitio et operatio eadem sit. Duplare enim est per duo multiplicare, Mediare vero est per duo partiri. Quod si hae operationes sint distinctae, infinitae jam nobis exorientur species, triplatio, quadruplatio etc. Sed satis de illis."

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| III. Pforte. Gemischte Zahlen. | 1. Kap. | Addition . . . . . | Seite | 88 |
| | 2. „ | Multiplikation . . . . . | „ | 89 |
| | 3. „ | Subtraktion . . . . . | „ | 90 |
| | 4. „ | Division . . . . . | „ | 90 |


## II. Abschnitt.


| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| I. Pforte. Astronomische Brüche. | 1. Kap. | Addition . . . . . | „ | 92 |
| | 2. „ | Multiplikation . . . . . | „ | 93 |
| | 3. „ | Subtraktion . . . . . | „ | 101 |
| | 4. „ | Division . . . . . | „ | 102 |
| II. Pforte. Quadrat- und Kubikwurzeln. | 1. Kap. | Quadratw. ganzer Zahlen | „ | 115 |
| | | Quadratw. der Brüche u. gemischten Zahlen . . . . | „ | 133 |
| | 2. „ | Kubikw. ganzer Zahlen | „ | 139 |
| | | Kubikw. der Brüche u. gemischten Zahlen . . . . | „ | 163 |
| III. Pforte. Proportionen. | 1. Kap. | arithmet. Proportionen . | „ | 167 |
| | 2. „ | geomet. Prop. von ganzen Zahlen . . . . . | „ | 169 |
| | | geomet. Prop. von Brüchen und gemischten Zahlen . | „ | 177 |
| | 3. „ | harmon. Proportionen . . | „ | 181 |


## III. Abschnitt.


| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| I. Teil. Arithmetische Aufgaben. | 1. Kap. | Aufgaben, die mittels Regeldetri gelöst werden | „ | 182 |
| | 2. „ | Aufgaben, die ohne Regeldetri gelöst werden . . . | „ | 198 |
| II. Theil. Geometrische Aufgaben. | 1. Kap. | Aufgaben, die mittels Regeldetri gelöst werden | „ | 211 |
| | 2. „ | Aufgaben, die ohne Regeldetri gelöst werden . . . | „ | 216 |

## 4. I. Abschnitt. I. Pforte. Ganze Zahlen.

Im ersten Kapitel lehrt Misrachi, nachdem er die Definition der Addition gegeben, die Formen und den Gebrauch der indischen Ziffern, die „sich über den ganzen Occident und den gröfsten Teil des Orients verbreitet hätten“. In der Folge wendet er aber auch oft noch die hebräischen Buchstaben zur Bezeichnung der Zahlen an, und zwar manchmal in der althergebrachten Weise, bei der das ganze Alphabet benutzt wird, manchmal nach dem Positionssysteme, welches nur von den neun Buchstaben א, ב, ג, ד, ה, ו, ז, ח, ט und der Null Gebrauch macht. Nach diesen Darlegungen wird gezeigt, wie die Addition ganzer Zahlen auszuführen ist.

Es würde die Geduld des Lesers auf eine allzu harte Probe stellen, wenn ich in meiner Berichterstattung hier und bei den übrigen Rechnungsarten auf alle Einzelheiten — das Untereinanderstellen, Einrücken, im Kopfe behalten u. s. w. — eingehen wollte. Bei uns lernen die Kinder in den ersten Schuljahren allmählich, was früher in den Lehrbüchern ausführlich dargelegt und begründet werden mufste. Auch ist die Sicherheit, die wir im praktischen Rechnen erzielen, eine gröfsere, als sie früher war, und so erklärt es sich, dafs früher ein gröfseres Gewicht auf sogenannte Proben gelegt wurde, als es jetzt geschieht. Misrachi giebt bei der Addition zuerst die Neunerprobe, die auf dem zahlentheoretischen Satze beruht, dafs eine jede Zahl bei der Division durch 9 denselben Rest wie ihre Quersumme liefert. Man schreibt unter Anwendung dieses Satzes neben jeden Summanden seinen Rest für den Divisor 9 und addiert diese Reste; ihre Summe, resp. der Rest derselben, mufs, die Richtigkeit der Rechnung vorausgesetzt, gleich dem Reste der zu prüfenden Summe für denselben Divisor sein. Da aber die Rechnung, auch wenn die Probe stimmt, nicht richtig zu sein braucht, indem der Fehler ein Vielfaches von 9 ausmachen kann, so ist diese Probe trügerisch. Ebenso unzuverlässig ist die ebenfalls von den „Alten“ gelehrte Siebenerprobe, bei welcher neben jeden Summanden der durch wirkliche Division [1]) zu findende Rest für den

[1]) Es ist auffallend, dafs Misrachi seinen Schülern nicht auch die im Talmud (Aboda Sara 9 b) enthaltene Teilbarkeitsregel für 7 giebt, nach welcher der Rest einer Zahl für den Divisor 7 gefunden wird, wenn man vor der Division jedes Hundert durch 2 ersetzt.

Divisor 7 zu schreiben und die Summe dieser Reste zu bilden ist. Ist diese Summe, resp. ihr Rest gleich dem Reste der zu prüfenden Summe, so ist die Rechnung vielleicht richtig, im entgegengesetzten Falle sicherlich falsch.

Zu einer Probe, die wirklich erkennen läfst, ob man richtig oder falsch gerechnet habe, gelangt man nach Misrachi durch eine Vervollkommnung der Neunerprobe: Man dividiert die einzelnen Summanden und ebenso die Summe wirklich durch 9 und schreibt für jede Division sowohl den Quotienten als auch den Rest hin. Addiert man dann erstens die Quotienten und zweitens die Reste, welche die Summanden ergeben haben, so müssen diese Summen beziehungsweise mit dem Quotienten und dem Reste der auf ihre Richtigkeit zu prüfenden Summe übereinstimmen.

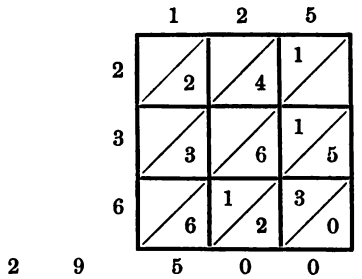
Im zweiten Kapitel wird auf Grund der vorher gegebenen Einteilung der Zahlen in Einer, Einer mit angehängten Nullen und allgemeine mehrstellige Zahlen gezeigt, dafs bei der Multiplikation zweier Zahlen sechs verschiedene Fälle zu unterscheiden seien. Im ersten Falle handelt es sich um die Multiplikation zweier einstelligen Zahlen, und da eine solche sich nicht auf etwas Einfacheres zurückführen lasse, so seien alle Multiplikationen dieser Art in einer Tabelle zusammenzustellen, die man sich allmählich aneignen müsse. Diese Tabelle, das Einmaleins, hat die Form eines durch eine Diagonale (in welcher die Quadratzahlen stehen) in zwei Dreiecke geteilten Quadrates; da der Satz $a.b = b.a$ zur Anwendung gekommen ist, so konnte das eine Dreieck leer bleiben [1]).

Die Multiplikation mehrstelliger Zahlen wird dann auf verschiedene Arten gelehrt, die sich in der Schreibweise und hinsichtlich der Anforderungen unterscheiden, die sie an das Gedächtnis des Rechnenden stellen. Neben der jetzt gebräuchlichen Schreibweise mit dem Einrücken nach links fällt besonders die von den Indern erfundene schachbrettartige Multi-

---

[1]) Auch Johannes Widmann giebt in seinem Rechenbuche neben einer quadratischen eine dreieckige Einmaleins-Tafel und sagt von letzterer, sie sei „eyn tafel gformirt uf den triangel gezogen uss hebreischer zungen oder judscher". Es wäre interessant, zu ermitteln, welchen jüdischen Schriftsteller Widmann im Auge hatte. Misrachi kann es nicht gewesen sein, da die letzte Ausgabe des Widmann noch vor dem Sefer-Hamispar des Misrachi erschienen ist.

plikation ins Auge, welche das Gedächtnis am wenigsten belastet. Sie setzt die Herstellung einer schachbrettartigen Figur voraus, deren Felder durch gleichlaufende, von rechts oben nach links unten gezogene Diagonalen in je zwei Dreiecke geteilt sind, in deren unteres die Einer jedes Partialproduktes geschrieben werden, während das obere die Zehner aufnimmt oder, wenn keine Zehner vorhanden sind, leer bleibt. Nachdem man dann jede Ziffer des einen Faktors mit jeder Ziffer des anderen multipliziert und die Produkte in der dargelegten Weise hingeschrieben hat, wird nach den schrägen Kolumnen, welche durch die Diagonalen gebildet werden, addiert. Nach diesem Verfahren berechnet Misrachi das Produkt 236.125 = 29500. Seine Figur ist folgende:




Dieselbe Multiplikation wird dann nach der ebenfalls von den Indern herrührenden Methode ausgeführt, welche alle Zwischenrechnungen dem Gedächtnis überläßt und auf der Formel

$$(a_0 + 10.a_1 + 100.a_2 + \cdots).(b_0 + 10.b_1 + 100.b_2 + \cdots) = a_0 b_0 + 10\,(a_0 b_1 + a_1 b_0) + 100\,(a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) + \cdots$$

beruht.

Zur Probe werden wieder die Zahlen durch ihre Reste für den Divisor 9 oder 7 ersetzt; die Reste der Faktoren müssen dann ein Produkt geben, welches, von Vielfachen von 9 oder 7 abgesehen, mit dem Reste des Produktes übereinstimmt; übrigens seien, bemerkt Misrachi, diese Proben unzuverlässig; die einzig richtige Probe der Multiplikation sei die Division.

Nachdem so die Ausführung der Multiplikation auf verschiedene Weisen gelehrt ist, werden eine Reihe Regeln mitgeteilt, welche offenbar Erleichterungen beim Kopfrechnen gewähren sollen. Der Kürze wegen will ich mich bei der Wiedergabe der wichtigeren derselben der modernen Ausdrucksweise bedienen. Misrachi berechnet nach der Formel

$(a+b)(a-b) = a^2-b^2$ $\quad 29.31 = 900-1 = 899.$

$(3a)^2 = 10a^2-a^2$ $\quad 24.24 = 640-64 = 576.$

$(3a+1)^2=(3a)^2+[(3a+1)+3a]$ $\quad 25.25 = 24^2+49 = 625.$

$(3a-1)^2=(3a)^2-[(3a-1)+3a]$ $\quad 23.23 = 24^2-47 = 529.$

Die drei letzten Formeln hat auch Abraham ibn Esra in seinem Sefer-Hamispar angewandt. Misrachi geht weiter und giebt

$$(5a)^2 = 10a^2.2\tfrac{1}{2},\ (5a+1)^2 = (5a)^2+[(5a+1)+5a],$$

und ebenso die Ausdrücke für

$$(5a-1)^2,\ (5a+2)^2,\ (5a-2)^2.$$

Weiter macht er Anwendungen der folgenden Sätze Euklids:

1. Wenn $a = b+c+d$ ist, so ist $a^2 = ab+ac+ad$.
2. Wenn $a = b+c$ ist, so ist $ab = bc+b^2$ und $a^2 = b^2+c^2+2bc$.
3. Wenn $2a=b+c$ und $b>c$ ist, so ist $a^2=bc+(b-a)^2$.
4. Wenn $a = b+c$ ist, so ist $a^2+b^2 = 2ab+c^2$, $4ab+c^2 = (a+b)^2$, $b^2+c^2 = 2\left\{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(b-\frac{a}{2}\right)^2\right\}$, $(a+b)^2+b^2 = 2\left\{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}+b\right)^2\right\}$.

Der Rest des zweiten Kapitels ist der Summation verschiedener Reihen gewidmet, die in dem ersten Kapitel noch nicht gelehrt werden konnte, weil die Auswertung der Summe eine Multiplikation erfordert.

Den Anfang macht die Reihe der natürlichen Zahlen. Misrachi ermittelt die Summe $1+2+3+\cdots+n$, je nachdem $n$ gerade oder ungerade ist, beziehungsweise durch Berechnung der identischen Ausdrücke

$$(n+1)\cdot\frac{n}{2},\ \left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)\cdot n.$$

Darauf lehrt er die Summe der ungeraden Zahlen von 1 bis zu einer gegebenen Grenze kennen, und zeigt, dafs diese Summe gleich dem Quadrate der Anzahl der Zahlen ist. Dann wird in derselben Weise die Reihe der geraden Zahlen betrachtet und summiert. Der Vollständigkeit wegen wird auch gezeigt, wie man verfährt, wenn eine der betrachteten Reihen nicht mit 1, resp. 2, sondern mit einem späteren Gliede beginnt. In diesem

Falle soll zunächst die Summe aller Glieder von 1, resp. 2 an bestimmt und von derselben die Summe der nicht geltenden Glieder subtrahiert werden. Endlich wird die Summe der arithmetischen Reihe allgemein für ein beliebiges Anfangsglied und eine beliebige Differenz ermittelt.

Eigentümlich ist die Begründung der Formel für die Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis zu einer vorgeschriebenen Grenze. Das Verhältnis von 1 zur folgenden Zahl, d. i. 2, hat den Werth $^1/_2$; das Verhältnis von $1 + 2$ zur folgenden Zahl, d. i. 3, hat den Werth 1, ist also um $^1/_2$ gröfser als das vorhergehende Verhältnis. Weiter ist $(1 + 2 + 3) : 4 = 1^1/_2$, also $^1/_2$ mehr als 1. So nimmt das Verhältnis für jede neu hinzutretende Zahl um $^1/_2$ zu, und wenn es gelingt, diesen durch Induktion gefundenen Satz zu beweisen, so ist damit auch die in Rede stehende Formel bewiesen. Der Beweis ist aber sehr einfach. Setzt man nämlich

$$\frac{1 + 2 + 3 + \cdots + n}{n + 1} = n \cdot \frac{1}{2},$$

also

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = (n + 1)\, n \cdot \frac{1}{2}$$

voraus, so ergiebt sich durch beiderseitige Addition von $n + 1$

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n + n + 1 = (n + 1)\, n \cdot \frac{1}{2} + n + 1$$

$$= (n + 1)\left(\frac{n}{2} + 1\right) = \frac{(n + 1)\,(n + 2)}{2},$$

also, wenn beiderseits durch $n + 2$ dividiert wird,

$$\frac{1 + 2 + 3 + \cdots + (n + 1)}{n + 2} = (n + 1) \cdot \frac{1}{2}.$$

Wenn somit der Satz bis zu einer gewissen Zahl $n$ richtig ist, so gilt er auch noch für die folgende Zahl $n + 1$, und da er für die ersten Zahlen besteht, so hat er allgemeine Gültigkeit.

An die arithmetischen Reihen schliefst sich die Reihe der Quadrate der natürlichen Zahlen. Misrachi rechnet verschiedene Beispiele nach der Formel

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n + 1}{2} \cdot n \cdot \left(\frac{2n}{3} + \frac{1}{3}\right).$$

Er vergifst auch nicht, an einem Beispiele zu erläutern, dafs, wenn das erste Glied nicht $1^2$, sondern eine andere Quadratzahl

ist, man vermittelst zweier Additionen und einer Subtraktion die verlangte Summe findet. Ebenso betrachtet und summiert er Reihen, die entstehen, indem man die Reihe der Quadratzahlen mit der nämlichen Zahl multipliziert, wie z. B.

$$3 + 12 + 27 + 48 + \cdots$$

Bei der Begründung der obigen Formel geht er folgendermafsen zu Werke: Er vergleicht die Summe der Quadrate mit der Summe der Zahlen selbst und findet, dafs

$$\frac{1^2}{1} = 1, \quad \frac{1^2 + 2^2}{1 + 2} = 1 + \frac{2}{3}, \quad \frac{1^2 + 2^2 + 3^2}{1 + 2 + 3} = 1 + 2 \cdot \frac{2}{3}$$

ist, und dafs dieses Verhältnis für jede neu hinzutretende Zahl um $^2/_3$ wächst, dafs also

$$\frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2}{1 + 2 + 3 + \cdots + n} = 1 + (n - 1)\frac{2}{3} = \frac{2n + 1}{3}$$

ist, woraus sich dann, da

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n + 1)}{2}$$

ist, die Formel

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{2 \cdot 3}$$

sofort ergiebt. Auch die Richtigkeit dieses von Misrachi durch Induktion gefundenen Satzes läfst sich leicht beweisen. Wir setzen der Kürze wegen

$$1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 = \Sigma k^2,$$

$$1 + 2 + \cdots + k, \text{ d. i. } \frac{k(k + 1)}{2} = \Sigma k,$$

nehmen an, es sei

$$\frac{\Sigma n^2}{\Sigma n} = 1 + (n - 1)\frac{2}{3} = \frac{2n + 1}{3},$$

und beweisen auf Grund dieser Annahme, dafs

$$\frac{\Sigma (n + 1)^2}{\Sigma (n + 1)} = 1 + n \cdot \frac{2}{3} = \frac{2n + 3}{3}$$

sein wird. Offenbar ist

$$\Sigma (n + 1)^2 = \Sigma n^2 + (n + 1)^2,$$

und da

$$\Sigma n^2 = \frac{2n + 1}{3} \Sigma n = \frac{2n + 1}{3} \cdot \frac{n(n + 1)}{2}$$

vorausgesetzt wird, so ist

$$\Sigma\,(n+1)^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

$$= (n+1)\left[\frac{n\,(2n+1)}{6} + n + 1\right] = (n+1)\cdot\frac{2n^2+7n+6}{6},$$

folglich

$$\frac{\Sigma\,(n+1)^2}{\Sigma\,(n+1)} = \frac{(n+1)\,\frac{2n^2+7n+6}{6}}{\frac{(n+1)\,(n+2)}{2}} = \frac{2n^2+7n+6}{3\,(n+2)},$$

oder, wie die Ausführung der Division ergiebt,

$$\frac{\Sigma\,(n+1)^2}{\Sigma\,(n+1)} = \frac{2n+3}{3}.$$

Weiter summiert Misrachi die Kuben der natürlichen Zahlen. Er begründet die Formel

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2,$$

die er natürlich in Worten ausdrückt, und mittels deren er auch die Summe der Reihe

$$a + a.2^3 + a.3^3 + \cdots + a.n^3$$

findet, durch die Bemerkung, dafs

$$\frac{1^3+2^3}{1+2} - \frac{1^3}{1} = 2, \quad \frac{1^3+2^3+3^3}{1+2+3} - \frac{1^3+2^3}{1+2} = 3,$$

allgemein

$$\frac{1^3+2^3+\cdots+n^3+(n+1)^3}{1+2+\cdots+n+(n+1)} - \frac{1^3+2^3+\cdots+n^3}{1+2+\cdots+n} = n+1$$

ist. In der That ergiebt sich durch Addition der Gleichungen

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{1^3}{1} = 1 \\ \dfrac{1^3+2^3}{1+2} - \dfrac{1^3}{1} = 2 \\ \dfrac{1^3+2^3+3^3}{1+2+3} - \dfrac{1^3+2^3}{1+2} = 3 \\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\Sigma\,(n+1)^3}{\Sigma\,(n+1)} - \dfrac{\Sigma\,n^3}{\Sigma\,n} = n+1, \end{cases}$$

dafs

$$\frac{\Sigma\,(n+1)^3}{\Sigma\,(n+1)} = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n+1),$$

oder, da $\Sigma\,(n+1) = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n+1)$ ist,

$$\Sigma\,(n+1)^3 = [\Sigma\,(n+1)]^2 \tag{2}$$

sein wird. Es kommt also wieder nur darauf an, den obigen, von Misrachi durch Induktion gefundenen Satz zu beweisen. Wir nehmen zu diesem Zwecke an, die Gleichungen (1), mit Ausnahme der letzten, seien richtig, und beweisen, dafs dann auch die letzte noch gelten muss. Die Addition der Gleichungen (1), mit Ausschlufs der letzten, ergiebt:

$$\frac{\Sigma\, n^3}{\Sigma\, n} = \Sigma\, n, \quad \text{also} \quad \Sigma\, n^3 = (\Sigma\, n)^2.$$

Nun ist aber

$$\Sigma\,(n+1)^3 = \Sigma\, n^3 + (n+1)^3 = (\Sigma\, n)^2 + (n+1)^3$$
$$= \left[\frac{n\,(n+1)}{2}\right]^2 + (n+1)^3 = (n+1)^2\left(\frac{n^2}{4} + n + 1\right)$$
$$= (n+1)^2\left(\frac{n}{2}+1\right)^2 = \left(\frac{(n+1)\,(n+2)}{2}\right)^2 = [\Sigma\,(n+1)]^2,$$

folglich

$$\frac{\Sigma\,(n+1)^3}{\Sigma\,(n+1)} = \Sigma\,(n+1)$$

und

$$\frac{\Sigma\,(n+1)^3}{\Sigma\,(n+1)} - \frac{\Sigma\, n^3}{\Sigma\, n} = \Sigma\,(n+1) - \Sigma\, n = n + 1.$$

Zum Schlufs wird die sogenannte geometrische Progression behandelt. Misrachi giebt die Formel

$$1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^{n-1} = 2.2^{n-1} - 1$$

und folgert daraus

$$a + 2a + 4a + \cdots + 2^{n-1}a = 2.2^{n-1}a - a.$$

Sein Beweis ist (in moderner Ausdrucksweise) folgender: Es ist

$$2.2^{n-1} = 2^{n-1} + 2.2^{n-2},$$
$$2.2^{n-2} = 2^{n-2} + 2.2^{n-3},$$

somit

$$2.2^{n-1} = 2^{n-1} + 2^{n-2} + 2.2^{n-3}.$$

Auf diese Weise ergiebt sich

$$2.2^{n-1} = 2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \cdots + 4 + 2 + 2.1,$$

und daraus folgt, wenn beiderseits 1 subtrahiert wird,

$$2.2^{n-1} - 1 = 2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 4 + 2 + 1.$$

Weiter wird die Summe der Reihe $1 + 3 + 9 + \cdots + 3^{n-1}$ bestimmt. Es ist

$$\begin{aligned} 3^n &= 2.3^{n-1} + 3^{n-1}, \\ 3^{n-1} &= 2.3^{n-2} + 3^{n-2}, \\ &\cdots\cdots\cdots, \\ 9 &= 2.3 + 3, \\ 3 &= 2.1 + 1, \end{aligned}$$

also $3^n = 2\,(1 + 3 + \cdots + 3^{n-1}) + 1$, und daraus folgt, dafs

$$1 + 3 + 9 + \cdots + 3^{n-1} = \frac{3^n - 1}{2} \text{ ist.}$$

Auf dieselbe Weise findet Misrachi allgemein

$$a^n = (a - 1)\,(1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1}) + 1,$$

und daraus folgt sodann

$$1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1} = \frac{a^n - 1}{a - 1}.$$

Das dritte Kapitel, in welchem die Subtraktion ganzer Zahlen in der noch jetzt üblichen Weise gelehrt wird, giebt keinen Anlafs zu Bemerkungen. Zur Probe werden wieder die Zahlen 9 und 7 in der oben dargelegten Weise benutzt, auch der Rest zum Subtrahend addiert, wodurch sich dann der Minuend ergeben mufs. Zum Schlufs wird darauf aufmerksam gemacht, dafs die Differenz zweier geraden Zahlen und ebenso diejenige zweier ungeraden Zahlen stets gerade, dagegen die Differenz einer geraden und einer ungeraden Zahl stets ungerade ist.

Auch bei der Division ganzer Zahlen, die im vierten Kapitel behandelt wird, brauche ich nicht zu verweilen, da nur die Schreibweise von der jetzt üblichen abweicht. Der Divisor wird unter den Dividenden gesetzt; die den einzelnen Quotientenziffern entsprechenden Teilprodukte, bei deren Bildung links begonnen wird, werden nach dem Verfahren der Inder sofort an den betreffenden Stellen subtrahiert und die Reste über die vorhandenen Ziffern geschrieben. Ganz eigentümlich berührt es uns, auch noch eine Division in altägyptischer Weise ausgeführt zu sehen: Es soll 70962 durch 231 dividiert werden. Das geschieht, indem das 100fache des Divisors, d. i. 23100 dreimal (unter einander) hingeschrieben wird; darunter wird das 5fache, d. i. 1155 gesetzt, darunter 231 und noch einmal 231; diese sechs Zahlen sind dann addiert, was 70917 ergiebt, und diese

Zahl ist vom Dividend subtrahiert, was 45 als Rest liefert. Der Quotient ist dann $100 + 100 + 100 + 5 + 1 + 1 = 307$.

Zur Probe werden wieder die Reste von Dividend, Divisor, Quotient und Rest für 9 (und 7) genommen. Werden diese Reste beziehungsweise mit $d_1$, $d_2$, $q$, $r$ bezeichnet, so mufs, die Richtigkeit der Rechnung vorausgesetzt, $d_1 = d_2 q + r$ sein.

## 5. I. Abschnitt. 2. und 3. Pforte. Brüche und gemischte Zahlen.

Die zweite Pforte giebt die Lehre von den Brüchen. In Betreff der Schreibweise, die mit der unserigen übereinstimmt, bemerkt Misrachi: „Die spanischen Gelehrten pflegen den Zähler über den Nenner zu schreiben und dazwischen einen Strich zu machen, um die Zusammengehörigkeit beider Zahlen auszudrücken.“ Er erwähnt dann die von den arabischen Gelehrten, denen sich Abraham ibn Esra angeschlossen habe, vorgenommene Einteilung der Brüche in aussprechbare und stumme, die nichts mit dem Wesen der Brüche zu thun habe, sondern auf einer Eigentümlichkeit der arabischen und der hebräischen Sprache beruhe. Aussprechbar sind die Brüche mit den Nennern 2 bis 10, weil beide Sprachen Wörter für Halbe, Drittel, . . ., Zehntel besitzen, und ferner diejenigen Brüche, welche sich multiplikativ aus den genannten zusammensetzen lassen, wie z. B. $1/15$, wofür $1/3$ von $1/5$ gesagt wird. Die übrigen Brüche sind stumm und werden durch eine Umschreibung ausgedrückt; so z. B. sagt man, um $1/11$ anzugeben, „1 Teil von 11 Teilen“.

Misrachi teilt, wie die Araber, die Brüche in einfache und vielfache ein; ein einfacher Bruch hat den Zähler 1; der Zähler eines vielfachen Bruches ist $> 1$. Ferner sieht er die sogenannten Bruch-Brüche, wie z. B. $3/4$ von $4/7$ von 2, wofür ich der Deutlichkeit wegen nicht $3/4\ 4/7\ 2$, sondern $\frac{3}{4}\left|\frac{4}{7}\right|\frac{2}{-}$ schreiben werde, oder $\frac{3}{4}\left|\frac{2}{7}\right|\frac{4}{5}\left|\frac{1}{-}\right. = 3/4$ von $2/7$ von $4/5$ von 1, als besondere Arten an. Er würde, wie er bemerkt, so zu einer unendlichen Menge von Arten kommen, setzt aber nur 12 voraus, zu deren Charakterisierung ich der Kürze wegen nur die von ihm gewählten Beispiele herschreibe:

$\frac{1}{3}\left|\frac{1}{}\right.$, $\frac{1}{3}\left|\frac{2}{}\right.$, $\frac{1}{3}\left|\frac{1}{4}\right|\frac{1}{}$, $\frac{1}{3}\left|\frac{1}{4}\right|\frac{2}{}$, $\frac{1}{3}\left|\frac{2}{3}\right|\frac{1}{}$, $\frac{1}{3}\left|\frac{4}{5}\right|\frac{2}{}$,

$\frac{2}{3}\left|\frac{1}{}\right.$, $\frac{2}{3}\left|\frac{2}{}\right.$, $\frac{2}{3}\left|\frac{3}{4}\right|\frac{1}{}$, $\frac{2}{3}\left|\frac{5}{7}\right|\frac{3}{}$, $\frac{2}{3}\left|\frac{1}{4}\right|\frac{1}{}$, $\frac{2}{3}\left|\frac{1}{4}\right|\frac{3}{}$.

Nachdem noch bemerkt worden ist, daſs die Brüche immer in den kleinsten Zahlen ausgedrückt werden sollen, daſs uneigentliche Brüche zu vermeiden und unechte durch gemischte Zahlen zu ersetzen sind, wird die Multiplikation der Brüche begonnen, die der Addition vorausgehen muſs, weil auf ihr die Umformung der Bruch-Brüche beruht. Da jeder von zwei zu multiplizierenden Brüchen jeder der 12 Arten angehören kann, so seien, sagt Misrachi richtig, im ganzen 144 Fälle möglich, oder bei Weglassung derjenigen, welche auf dasſelbe hinauslaufen, $12 + 11 + 10 + \cdots + 2 + 1 = 78$ Fälle. Diese führt er jedoch auf folgende drei zurück:

1) $\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} = \frac{1}{a\,b}$, z. B. $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$,

2) $\frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{b\,c}$, z. B. $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$,

3) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a\,c}{b\,d}$, z. B. $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.

Als Beispiel der Multiplikation von Bruch-Brüchen giebt er

$$\frac{2}{3}\left|\frac{3}{4}\right|\frac{2}{5}\left|\frac{4}{}\right. \cdot \frac{3}{4}\left|\frac{2}{7}\right|\frac{2}{5}\left|\frac{3}{}\right. = \frac{1728}{8400}.$$

Die allgemeine Regel der Multiplikation drückt er in den Worten aus: „Multipliziere Nenner mit Nenner und Zähler mit Zähler und nimm das Verhältnis des zweiten Produktes zum ersten.“ Bei der Begründung dieser Regel benutzt er folgende fünf Sätze:

1) Der Wert eines Bruches bleibt unverändert, wenn Zähler und Nenner mit derselben Zahl multipliziert oder durch dieselbe Zahl dividiert werden.

2) Einen Bruch mit einem anderen multiplizieren ist dasſelbe, wie den Bruch des Bruches nehmen.

3) Wenn man $a.b = c$ hat, so ist $a = \frac{1}{b}$ von $c$.

4) Man erhält einen Teil eines Bruches, indem man den verlangten Teil vom Zähler nimmt und das Verhältnis der so erhaltenen Zahl zum Nenner bestimmt.

5) Man vervielfacht einen Bruch, indem man den Zähler vervielfacht und das Verhältnis des erhaltenen Produktes zum Nenner nimmt.

Die Probe besteht in der Division des Produktes durch einen der Faktoren. Zum Schluſs erfahren wir noch, daſs „die Früheren“ die Brüche vor der Multiplikation gleichnamig gemacht, also z. B. folgendermaſsen gerechnet hätten:

$$^3/_4 \cdot {}^2/_9 = {}^{27}/_{36} \cdot {}^8/_{36} = {}^{216}/_{1296} = {}^6/_{36} = {}^1/_6.$$

Die Addition der Brüche wird nach der Formel

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n}{b_n} = \frac{a_1 b_2 \ldots b_n + a_2 b_1 b_3 \ldots b_n + \cdots}{b_1 b_2 \ldots b_n}$$

ausgeführt, die natürlich in Worten ausgesprochen und mittels des schon bei der Multiplikation benutzten Satzes, nach welchem $\frac{a}{b} = \frac{a\,m}{b\,m}$ ist, begründet wird. Als Beispiele werden $^1/_3 + {}^1/_4 + {}^1/_5$, $^1/_4 + {}^3/_5 + {}^2/_7$, $^2/_3 + {}^3/_4 + {}^4/_5$ behandelt. Wenn viele Brüche zu addieren sind, fügt Misrachi hinzu, so kann man auch die beiden ersten addieren, zur Summe den dritten fügen und so fortfahren, bis alle genommen sind. Was die Addition der neun ersten einfachen Brüche (mit den Nennern 2, 3, . . ., 10) betrifft, so soll der Leser sich merken, daſs der Generalnenner 2520 und bei Weglassung der 7 gleich 360 ist. Es wird dann dargelegt, wie man den Generalnenner mehrerer, zunächst zweier Brüche ermittelt. Wenn die Nenner beider Brüche teilerfremd sind, so nimmt man ihr Produkt. Sind die Nenner nicht teilerfremd, so hat man zwei Fälle zu unterscheiden: Erstens kann der eine Nenner in dem anderen enthalten sein; in diesem Falle ist der gröſsere Nenner der Generalnenner. Ist zweitens der eine Nenner nicht in dem anderen enthalten, so hat man das Verhältnis beider Nenner in den kleinsten Zahlen auszudrücken und dann entweder den gröſseren Nenner mit der dem kleineren entsprechenden Verhältniszahl oder den kleineren mit der Verhältniszahl des gröſseren zu multiplizieren; das erhaltene Produkt wird der Generalnenner sein. Liegen mehr als zwei Brüche vor, so wird auf die dargelegte Weise der Generalnenner der beiden ersten berechnet, dann der dritte Nenner hinzugezogen und der Generalnenner für diesen und den erst erhaltenen bestimmt, u. s. w. Die Probe der Addition, welche Misrachi vorschlägt, will ich gleich an dem von ihm gewählten Beispiele erläutern: Um zu

prüfen, ob wirklich $^1/_3 + {}^1/_4 + {}^1/_5 = {}^{47}/_{60}$ ist, addiert er die Gleichung $1 - {}^1/_4 = {}^3/_4$; es ergiebt sich, da $^{47}/_{60} + {}^3/_4 = {}^{92}/_{60} = 1{}^8/_{15}$ ist, $1 + {}^1/_3 + {}^1/_5 = 1{}^8/_{15}$, und da in der That $^1/_3 + {}^1/_5 = {}^8/_{15}$ ist, so stimmt die Probe. Ebenso verfährt er noch mit $1 - {}^1/_3 = {}^2/_3$ und $1 - {}^1/_5 = {}^4/_5$.

Auch bei der Subtraktion mufs Misrachi, da er 12 verschiedene Arten von Brüchen voraussetzt, eine Menge verschiedener Fälle unterscheiden, die er aber auf folgende zurückführt:

1) $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$, z. B. $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$; 2) $\frac{a}{b} - \frac{c}{d}$, z. B. $\frac{3}{4} - \frac{2}{7}$;

3) $\frac{a}{b} - \frac{1}{c}$, z. B. $\frac{3}{4} - \frac{1}{3}$, 4) $\frac{1}{a} - \frac{b}{c}$, z. B. $\frac{1}{2} - \frac{2}{7}$.

Die Differenz wird in allen Fällen nach der Formel

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$$

berechnet; zugleich wird aber auch an jedem der genannten vier Beispiele gezeigt, wie mittels der Identitäten

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = 1 - \left\{\left(1 - \frac{a}{b}\right) + \frac{c}{d}\right\} = \frac{a}{b} + \left(1 - \frac{c}{d}\right) - 1$$

jede Subtraktion durch eine Addition ersetzt werden kann.

Dann folgen verschiedene zusammengesetzte Aufgaben, z. B.

$$({}^4/_5 + {}^5/_6 + {}^1/_7) - ({}^1/_2 + {}^1/_3 + {}^3/_4),$$
$$({}^2/_3 - {}^1/_2) \cdot ({}^4/_5 - {}^3/_4), \quad {}^3/_4 \cdot {}^4/_5 - {}^1/_2 \cdot {}^2/_3,$$
$$[({}^1/_2 \cdot {}^2/_3) + ({}^3/_4 \cdot {}^4/_5)] - [({}^3/_7 \cdot {}^4/_5) + ({}^2/_3 \cdot {}^1/_4)].$$

Den Schlufs des Kapitels bilden wieder Proben, welche beziehungsweise darauf beruhen, dafs erstens die Summe des Restes und des Subtrahends gleich dem Minuend, zweitens die um den Subtrahend verminderte Summe des Restes und des Minuends gleich dem doppelten Reste, drittens die Differenz zwischen Minuend und Rest gleich dem Subtrahend sein mufs.

Durch die Division, definiert Misrachi, wird das Verhältnis eines Bruches zu einem anderen bestimmt, oder es wird ausgerechnet, wie oft der eine im anderen enthalten ist. ${}^3/_4 : {}^1/_8 = 6$ bedeutet, dafs $^3/_4$ sich in sechs Teile zerlegen läfst, von denen jeder gleich $^1/_8$ ist. Die vielen für ihn möglichen Fälle werden auf folgende vier zurückgeführt:

1) $\frac{1}{a} : \frac{1}{b}$, z. B. $\frac{1}{3} : \frac{1}{4}$; 2) $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$, z. B. $\frac{2}{3} : \frac{3}{8}$;

3) $\frac{a}{b} : \frac{1}{c}$, z. B. $\frac{2}{3} : \frac{1}{4}$; 4) $\frac{1}{a} : \frac{b}{c}$, z. B. $\frac{1}{2} : \frac{2}{9}$;

und nach der Regel behandelt: Multipliziere den Zähler des Dividenden mit dem Nenner des Divisors und teile das Resultat durch das Produkt aus dem Nenner des Dividenden in den Zähler des Divisors.

Es werden aber auch die Brüche gleichnamig gemacht und dann blofs die Zähler dividiert; ferner wird ein Beispiel nach der Formel

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{\frac{bc}{d}}$$

behandelt. Beispiele zusammengesetzter Aufgaben sind:

1) $(1/6 + 2/7) : (3/4 + 2/3)$; 2) $(2/3 : 3/4) + (1/6 : 2/7)$;
3) $(2/7 \cdot 1/6) : (2/3 \cdot 3/4)$; 4) $(2/3 : 3/4) \cdot (1/6 : 2/7)$;
5) $(2/7 - 1/6) : (3/4 - 2/3)$; 6) $(1/6 : 2/7) - (2/3 : 3/4)$.

In Betreff der Probe wird bemerkt: Multipliziere den Divisor mit dem Quotienten; wenn das, was herauskommt, gleich dem Dividend ist, so hast du richtig gerechnet.

Die letzte (dritte) Pforte des ersten Teils handelt von den gemischten Zahlen. Nach einer Erörterung über die Zahl der Fälle, welche die Verbindung von je zwei Zahlen der Formen

$$a, \frac{1}{a}, \frac{a}{b}, a + \frac{1}{b}, a + \frac{b}{c}$$

ergiebt, wird gezeigt, wie jede gemischte Zahl mittels der Formel

$$a + \frac{b}{c} = \frac{ac + b}{c}$$

in einen Bruch verwandelt werden kann. Dann werden der Reihe nach die Addition, Multiplikation und Subtraktion gelehrt, und zwar jede dieser Rechnungsarten auf zwei Weisen; nach der einen werden die vorkommenden gemischten Zahlen beibehalten, nach der anderen vor Ausführung der eigentlichen Rechnung durch unechte Brüche ersetzt. Bei der Division ist, wie Misrachi eingehend zu begründen sucht, nur der letztere Weg möglich.

## 6. II Abschnitt. 1. Pforte. Die astronomischen Brüche.

Die Astronomen Babyloniens haben vor mehr als 3000 Jahren den Umfang des Kreises in 360 gleiche Teile geteilt, wohl um durch einen solchen Teil den Weg zu versinnlichen, den die Sonne bei ihrem scheinbaren Umlaufe um die Erde in einem Tage, dem 360sten Teile des Jahres, zurücklege. Diese Einteilung ist von den Indern und Griechen angenommen worden und hat sich, durch das schon erwähnte Werk „Almagest“ des Klaudius Ptolemaeus zu allgemeiner Geltung gebracht, bis in die Gegenwart behauptet. Der 360ste Teil des Kreisumfanges hiefs bei den Griechen μοῖρα[1]), die μοῖρα zerfiel in 60 πρῶτα ἑξηκοστά = partes minutae primae oder minuta prima (erste Teile), jeder solche Teil in 60 δεύτερα ἑξηκοστά = minuta secunda (zweite Teile), u. s. w., woraus unsere Ausdrücke Minute, Sekunde, u. s. w. entstanden sind.

Es erwies sich auch ein Zusammenfassen einer gröfseren Anzahl von Graden in eine (höhere) Einheit als wünschenswert; zu diesem Zwecke wählte man den Tierkreis mit seinen 12 Sternbildern, so dafs ein Sternbild (signum) aus 30 Graden bestand.

Grade, Minuten, Sekunden u. s. w. sind somit ihrer ursprünglichen Bedeutung nach Benennungen von Zahlen; mit der Zeit gewann aber der Bruchgedanke die Oberhand: die Grade drückten die Ganzen aus, die Minuten wurden einfach 60stel, die Sekunden 60stel der 60stel, d. i. 3600stel, u. s. w., und die Lehre von den so gebildeten Sexagesimalbrüchen wurde ein wichtiges Kapitel in den Lehrbüchern der Mathematik. Freilich blieben diese Brüche dem gewöhnlichen Leben, wo man sich der gemeinen Brüche bediente, im ganzen fremd; sie wurden vorwiegend bei wissenschaftlichen Rechnungen, besonders in der Astronomie, angewandt und daher auch astronomische Brüche genannt. Am Ende des 16. Jahrhunderts machten sie den von dem Holländer Simon Stevin erfundenen Decimalbrüchen Platz.

---

[1]) Die Araber übersetzten dieses Wort mit daraja (דרגא) = scala, gradus; der lateinische Ausdruck gradus (daraus das deutsche Wort „Grad“) ist also eine Übersetzung aus dem Arabischen, während der französische und der englische Ausdruck (degré, degree) das arabische Wort selbst sind. Nesselmann, Die Algebra der Griechen, S. 137.

Das Rechnen mit diesen Brüchen wird von Misrachi sehr ausführlich gelehrt. Bei der Addition bemerkt er, dafs man, wie mit Tierkreis, Sternbild, Grad, Minute u. s. w., auch mit Woche, Tag, Stunde, Minute u. s. w. rechnen könne; nur seien dann die Zahlen 12 und 30 durch 7 und 24 zu ersetzen. Bei den Beispielen, die er giebt, wird in der Summe die Zahl der ganzen Umläufe, resp. der ganzen Wochen weggelassen, da es sich nur darum handelt, zu bestimmen, wie weit man nach Ausführung der Addition von dem Ausgangspunkte (auf dem Kreise oder in der Woche) entfernt ist.

Bei der Multiplikation zweier eingliedrigen Ausdrücke werden die Zähler multipliziert und die Benennungszahlen addiert; z. B. $70^{III} . 70^{IV} = 4900^{VII} = 81^{VI}\ 40^{VII} = 1^{V}\ 21^{VI}\ 40^{VII}$; bei mehrgliedrigen Ausdrücken wird jedes Glied des Multiplikanden mit jedem Gliede des Multiplikators vervielfacht und die Summe der Teilprodukte gebildet, welche letztere entweder sofort nach ihrer Entstehung oder am Schlufs der Rechnung reduziert werden. Misrachi lehrt auch noch ein zweites Verfahren; danach werden beide Faktoren auf die niedrigste Benennung gebracht, die erhaltenen Zahlen nach der für eingliedrige Ausdrücke gegebenen Regel multipliziert und das Product reduziert.

Über die Subtraktion ist nichts zu bemerken. Der Division ist besondere Sorgfalt gewidmet. Misrachi behandelt zuerst den Fall, in welchem Dividend und Divisor eingliedrig sind. Dann soll man durch Erweiterung mit der dazu erforderlichen Potenz von 60 es so einrichten, dafs die Zahl, nach welcher der Dividend benannt ist (0 für Grad; 1 für Minute; 2 für Sekunde u. s. w.), nicht kleiner sei als die des Divisors. Darauf wird, ohne Rücksicht auf die Benennung, der Dividend durch den Divisor dividiert und der Quotient nach der Zahl benannt, die man erhält, wenn man die Benennungszahl des Divisors von der des Dividenden subtrahiert. Das Verfahren wird an den Beispielen

$20'' : 15' = 1'\ 20''$, $20' : 15' = 1^0\ 20'$, $20^0 : 15' = 80^0$

ausführlich erläutert. Wenn Dividend und Divisor mehrgliedrig sind, so wird entweder nach der von der Buchstabenrechnung her bekannten Partialdivision verfahren, oder man bringt Dividend und Divisor auf dieselbe Benennung, dividiert sodann und reduziert den Quotienten. Auf beide Arten berechnet Misrachi

$15^0\ 46'\ 59''\ 52'''\ 30^{IV} : 5^0\ 2'\ 6'' = 3^0\ 8'\ 4''\ 58'''\ 48^{IV}\ 30^{V}$.

Zum Schluſs zeigt er noch, wie man die astronomischen Brüche auch in gemeine verwandeln und dann dividieren kann.

## 7. II. Abschnitt. 2. Pforte. 1. Kapitel. Ausziehung der Quadratwurzel.

Die Zahlen zerfallen in zwei Klassen, in Quadratzahlen, die durch Multiplikation einer Zahl mit sich selbst entstehen, wie $9 = 3.3$, und solche, die nicht in zwei gleiche Faktoren zerlegt werden können, wie z. B. 10. Die Zahl, welche, mit sich selbst multipliziert, eine andere Zahl hervorbringt, heiſst die Wurzel dieser letzteren, da sie sich zu ihr wie die Wurzel zur Pflanze verhält[1]). Nur die Quadratzahlen haben genau angebbare Wurzeln; die Wurzeln der übrigen Zahlen können zwar näherungsweise, aber nicht genau bestimmt werden, da ein Bruch, mit sich selbst multipliziert, immer nur einen Bruch geben kann.

Für die Aufsuchung der Quadratwurzeln ganzer Zahlen bedient sich dann Misrachi zunächst einer Methode, die sich von der jetzt befolgten nur in der Schreibweise unterscheidet: die Wurzel wird unter den Radikanden geschrieben; die Reste, welche die verschiedenen, im Laufe der Rechnung erforderlichen Subtraktionen liefern, werden über die entsprechenden Ziffern des Radikanden gesetzt, die dann als ungültig angesehen werden. Nach dieser Methode berechnet er

$$\sqrt{2025} = 45, \quad \sqrt{61690\,028\,49} = 78\,543.$$

Wenn der Radikand keine Quadratzahl ist, so wird der verbleibende Rest mit 60 multipliziert und dann auf Minuten u. s. w. weiter gerechnet, oder es werden dem Radikanden von vornherein $2n$ Nullen angehängt, und aus der so entstandenen Zahl wird die Wurzel gezogen. Der Rest, welcher sich dabei ergiebt, wird weggelassen. Die erhaltene Zahl wird dann $n$ mal nacheinander mit 60 multipliziert, und das Produkt wird, nachdem die am Ende stehenden $n$ Nullen weggelassen worden sind, mittels successiver Divisionen durch 60 auf höhere Benennungen gebracht.

---

[1]) Dieser Vergleich wird auch in anderen Werken jener Zeit gemacht, z. B. in Tartaglia, trattato etc. II, fol. 23.

Nach diesen Methoden[1]) zieht Misrachi die Wurzel aus 2000. Er erhält zuerst $44^0\ 43'\ 16''$, dann bei Anhängung von acht Nullen $44^0\ 43'\ 16''\ 40'''\ 48^{IV}$.

Die Begründung des Verfahrens, die natürlich auf der Formel $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ beruht, erfolgt in Form einer Reihe von Fragen und Antworten.

Eine zweite Methode, deren sich Misrachi bedient, besteht in folgendem: Wenn sich als Wert der Wurzel $a$ ergeben hat und ein Rest $r$ geblieben ist, der natürlich $< 2a + 1$ sein wird, so nimmt er als Näherungswert der Wurzel $a + \frac{r}{2a}$ an, setzt also näherungsweise $\sqrt{a^2 + r} = a + \frac{r}{2a}$; auch von dieser Methode sagt er, dafs sie von früheren Schriftstellern angewandt worden sei[2]).

Nachdem die Ausziehung der Quadratwurzel aus ganzen Zahlen gelehrt ist, werden die Brüche und gemischten Zahlen

---

[1]) Nach demselben Princip, aber etwas kürzer, wird verfahren in der durch Johannes Hispalensis aus dem Arabischen ins Lateinische übersetzten Schrift Liber Algorismi de pratica arismetrice (Trattati d'aritmetica, pubblicati da Boncompagni, II, S. 86), deren Verfasser noch nicht mit Sicherheit ermittelt ist. Der Marokkaner Ibn Albannâ (um 1250 geboren) multipliziert allgemeiner den Radikanden $a$ mit einer grofsen Quadratzahl $q^2$, zieht die Wurzel aus $aq^2$, wobei der Rest vernachlässigt wird, und dividiert den erhaltenen Wert durch $q$. (Le Talkhys, S. 23.)

[2]) Dieses nahe liegende Verfahren hat schon Heron von Alexandrien angewandt, indem er $\sqrt{a^2 + r} = \frac{1}{2}\left(a + \frac{a^2 + r}{a}\right)$ setzt, welcher Ausdruck mit $a + \frac{r}{2a}$ identisch ist. Heron fügt hinzu, dafs man, von dem so erhaltenen Näherungswerte ausgehend, einen zweiten, dritten, u. s. w. erhalte (Paul Tannery, Un fragment des métriques de Heron. Schlömilchs Zeitschr. für Mathematik u. Physik, Bd. 39).

Genau so wird in dem Liber Algorismi verfahren, das in der vorhergehenden Anmerkung erwähnt ist. Trattati etc., S. 77.

Alkarkhî (um 1000 n. Chr.) nimmt näherungsweise $\sqrt{a^2 + r} = a + \frac{r}{2a+1}$ an. (Kâfî fîl Hisâb, deutsch von Hochheim, II, S. 14.) Ebenso macht es Beha-eddin (Ausgabe von Nesselmann, S. 15).

Ibn Albannâ unterscheidet zwei Fälle. Wenn $r \leqq a$ ist, so setzt er $\sqrt{a^2+r} = a + \frac{r}{2a}$. Ist aber $r > a$, so nimmt er $\sqrt{a^2+r} = a + \frac{r}{2a+1}$ an (Le Talkhys, S. 23).

dieser Operation unterzogen. Die allgemeine Regel für die Brüche lautet: Ziehe die Wurzel aus dem Zähler und dem Nenner und nimm das Verhältnis beider Wurzeln. Beispiel:

$$\sqrt{100/16} = 10/4 = 2\,1/2 \quad \text{oder} \quad \sqrt{100/16} = \sqrt{6\,1/4} = 2\,1/2.$$

Wenn der Nenner keine Quadratzahl ist, so soll der Bruch erst mit demselben erweitert und dann die Wurzel aus beiden Gliedern gezogen werden. Beispiel:

$$\sqrt{200/5} = \sqrt{1000/25} = \frac{31^0\ 37'\ 22''}{5} = 6^0\ 19'\ 28''.$$

Gemischte Zahlen werden in unechte Brüche verwandelt und dann nach der vorhergehenden Regel behandelt. Beispiel:

$$\sqrt{14\,2/7} = \sqrt{100/7}.$$

Astronomische Brüche werden durch Resolution auf eine Benennung gebracht, deren Zahl sich ohne Rest durch 2 teilen läfst. Da auf diese Weise der Nenner eine Quadratzahl geworden ist, so hat man nur die Wurzel aus dem Zähler zu ziehen und das Resultat nach der Hälfte jener Benennungszahl zu benennen. Beispiel:

$$\sqrt{20^0\,24'\,20''\,30'''} = \sqrt{264\,457\,800^{IV}} = 16\,262\,|\,16'' = 4^0\,31'\,2''\,9'''.$$

Probe für alle Fälle: Multipliziere die Wurzel mit sich selbst und addiere zum Produkte den Rest, falls ein solcher geblieben ist.

## 8. II. Abschnitt. 2. Pforte. 2. Kapitel. Ausziehung der Kubikwurzel.

Wie die Flächenzahlen [1]) in quadratische und nicht quadratische zerfallen, so werden auch die körperlichen Zahlen [1]) in

---

Alkalçâdi (um 1480 gest.) giebt für $r \leqq a$ denselben Näherungswert wie Ibn Albannâ. Wenn aber $r > a$ ist, so setzt er $\sqrt{a^2 + r} = a + \frac{r+1}{2a+2}$. Von $\sqrt{a^2 + r} = a + \frac{r}{2a}$ ausgehend, giebt er dann noch einen genaueren Näherungswert $\left(a + \frac{r}{2a}\right) - \frac{\left(\frac{r}{2a}\right)^2}{2\left(a + \frac{r}{2a}\right)}$. Atti dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei XII, S. 402 ff.

[1]) Euklid definiert (VII, 16 u. 17): Wenn zwei Zahlen mit einander multipliziert sind, so heifst das Produkt eine Flächenzahl. Wenn drei Zahlen mit einander multipliziert sind, so heifst das Produkt eine körperliche Zahl.

solche geteilt, deren Länge, Breite und Tiefe einander gleich sind, wie z. B. $8 = 2.2.2$, und solche, bei denen dies nicht der Fall ist, wie z. B. 12. Aus den Zahlen der ersten Klasse läfst sich die Kubikwurzel genau ausziehen, aus denen der zweiten Klasse nicht. Wie wir uns aber nicht damit begnügt haben, die Quadratwurzel nur aus den Flächenzahlen zu ziehen, deren Länge und Breite einander gleich sind, so müssen wir auch hier die Kubikwurzel aus den körperlichen Zahlen ziehen, deren Länge, Breite und Tiefe verschieden sind. Das Verfahren, welches Misrachi dabei einschlägt, stimmt mit dem jetzt befolgten (abgesehen von der schon bei der Division und der Ausziehung der Quadratwurzeln besprochenen Abweichung in der Schreibweise) überein. Misrachi berechnet

$$\sqrt[3]{87\,652\,354} = 444, \text{ Rest } 123\,970,$$

dann

$$\sqrt[3]{34\,587\,654} = 325, \text{ Rest } 259\,529.$$

Um eine gröfsere Genauigkeit zu erzielen, verfährt er ähnlich wie bei der Ausziehung der Quadratwurzel. Er hängt $3n$ Nullen an den Radikanden, zieht dann die Kubikwurzel, soweit es geht, und läfst den Rest weg. Von dem Wurzelwerte werden die $n$ letzten Stellen abgeschnitten; die übrigen Ziffern bilden die Ganzen (Grade) der Wurzel. Die abgeschnittene Zahl wird mit 60 multipliziert, und von dem Produkte werden wieder die $n$ letzten Stellen abgeschnitten; die verbleibenden Ziffern bilden die Minuten des Wurzelwertes. Auf diese Weise erhält man durch $n$ Multiplikationen mit 60 einen Näherungswert der Wurzel, der um so genauer ist, je mehr Nullen man von anfang an angehängt hat. Auf diesem Wege findet er bei Anhängung von 9 Nullen

$$\sqrt[3]{800} = 9^0\ 16'\ 58''\ 48'''.$$

Als letztes Beispiel giebt er

$$\sqrt[3]{12\,895\,213\,625} = 2345.$$

Nach einer genauen Besprechung der Probe folgt die Begründung des Verfahrens, die sich auf die Formel

$$(a + b)^3 = a^3 + 3ab\,(a + b) + b^3$$

stützt und wieder in Form von Fragen und Antworten gegeben wird; die dabei angewandten Sätze werden zum Teil unter

ausdrücklicher Bezugnahme auf die Arithmetik des Nikomachus von Gerasa besonders ausgesprochen.

Für die Ausziehung der Kubikwurzel aus einem Bruche giebt Misrachi die Regel: Ziehe die Wurzel aus dem Zähler und dem Nenner und nimm das Verhältnis der ersten Wurzel zur zweiten. Beispiel:

$$\sqrt[3]{1000/8} = 10/2 = 5.$$

Wenn der Nenner keine Kubikzahl ist, so soll man den Bruch mit dem Quadrate des Nenners erweitern und dann die Wurzel ziehen. Beispiel:

$$\sqrt[3]{\frac{100}{10}} = \sqrt[3]{\frac{10\,000}{1000}} = \frac{21^0\,32'\,24''}{10} = \frac{21^0}{10} + \frac{32'}{10} + \frac{24''}{10}$$

$$= 2^1/_{10} + \frac{32}{600} + \frac{1}{1500},$$

oder direkt

$$\sqrt[3]{\frac{100}{10}} = \sqrt[3]{10} = 2^0\,9'\,14''\,24'''.$$

Es wird aber ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, dafs eine Erweiterung hier nur den Zweck hat, den Nenner (nicht etwa den Zähler) zu einer Kubikzahl zu machen, dafs man z. B. direkt

$$\sqrt[3]{\frac{100}{8}} = \frac{4^0\,38'\,24''}{2} = 2 + \frac{19}{60} + \frac{1}{300}$$

findet.

Gemischte Zahlen werden natürlich in unechte Brüche verwandelt, z. B.

$$\sqrt[3]{12^1/_2} = \sqrt[3]{\frac{25}{2}} = \sqrt[3]{\frac{100}{8}} = \frac{4^0\,38'\,24''}{2} = 2 + \frac{19}{60} + \frac{1}{300}.$$

Astronomische Brüche soll man auf eine Benennung bringen, deren Zahl durch 3 teilbar ist, dann die Kubikwurzel aus dem Zähler ziehen und das Resultat nach dem dritten Teile jener Zahl benennen, z. B.

$$\sqrt[3]{20^0\,24'\,20''\,30'''} = \sqrt[3]{4\,407\,630'''} = 163\,|\,9' = 2^0\,43'\,54''.$$

Zur Probe soll man die Wurzel auf die dritte Potenz erheben und den Rest, falls ein solcher geblieben ist, addieren. Das Resultat wird, wenn richtig gerechnet ist, der Radikand sein.

## 9. II. Abschnitt. 3. Pforte. Proportionen.

Bekanntlich nannte man und nennt wohl noch jetzt jede Beziehung zweier Zahlen aufeinander das Verhältnis derselben, und zwar spricht man von einem arithmetischen oder einem geometrischen Verhältnisse, je nachdem die Zahlen durch Subtraktion oder durch Division verglichen werden. Durch die Gleichsetzung zweier Verhältnisse entsteht eine Proportion, die danach zunächst entweder arithmetisch, wie $a - b = c - d$, oder geometrisch, wie $a : b = c : d$, ist.

Im ersten Kapitel betrachtet Misrachi die arithmetische Proportion oder, was auf dasselbe hinausläuft, Zahlen gleicher Differenz. Er entwickelt folgende Eigentümlichkeiten derselben:

1. Wenn die Anzahl der Zahlen ungerade ist, so ist die Summe der ersten und letzten das Doppelte der mittleren. Ist dagegen die Anzahl eine gerade, so ist die Summe der ersten und der letzten gleich der Summe der beiden mittleren. Für die Zahlen 2, 4, 6, 8, 10 z. B. ist $2 + 10 = 6 . 2$, und für 2, 4, 6, 8 ist $2 + 8 = 4 + 6$.

2. Bei einer ungeraden Anzahl von Zahlen ist die Differenz zwischen dem Quadrate der mittleren und dem Produkte der ersten in die letzte gleich dem Produkte aus der Differenz zwischen der mittleren und ersten in die Differenz zwischen der letzten und der mittleren. Für 2, 4, 6, 8, 10 z. B. ist $6^2 - 2 . 10 = (6 - 2)(10 - 6)$.

Bei einer geraden Anzahl ist die Differenz zwischen dem Produkte der beiden mittleren und dem Produkte der ersten in die letzte gleich dem Produkte aus der Differenz einer der beiden mittleren und der ersten in die Differenz der letzten und jener mittleren. Für 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 z. B. ist $8 . 10 - 2 . 16 = (8 - 2)(16 - 8) = (10 - 2)(16 - 10)$.

3. In einer Reihe dieser Art ist das (geometrische) Verhältnis zweier aufeinander folgenden kleineren Zahlen gröfser als das Verhältnis zweier aufeinander folgenden gröfseren. Bei den Zahlen 2, 4, 6 z. B. ist $^4/_2 > {}^6/_4$.

Weiter wird gezeigt, wie man in jeder der beiden Proportionen $a - b = c - d$, $a - b = b - c$ irgend ein Glied berechnen kann, sobald die übrigen Glieder gegeben sind.

Das zweite Kapitel behandelt die geometrische Proportion oder, was auf dasselbe hinausläuft, Zahlen, von denen jede aus der vorhergehenden durch Multiplikation mit derselben Zahl entsteht, wie 2, 4, 8, 16, u. s. w. oder 2, 6, 18, 54, u. s. w. Auch von diesen werden drei Eigentümlichkeiten erörtert.

1. Die Differenzen je zweier aufeinander folgenden Zahlen stehen in demselben Verhältnisse wie zwei solche Zahlen selbst. Für die Reihe 3, 9, 27, 81 u. s. w. ist danach $(9-3):(27-9) = 3:9$.

2. Aus $a:b = b:c$ folgt $b^2 = ac$, und aus $a:b = c:d$ folgt $bc = ad$.

3. Bei einer ungeraden Anzahl von Zahlen

$$a,\ aq,\ aq^2,\ \ldots,\ aq^n,\ aq^{n+1},\ \ldots,\ aq^{2n},$$

wo also $aq^n$ die mittlere ist, hat man

$$(aq^{2n} + a) - 2.aq^n = (aq^n - a)(q^n - 1).$$

Für die Reihe 2, 4, 8, 16, 32 z. B. ist

$$(32 + 2) - 2.8 = (8 - 2)(4 - 1).$$

Ist dagegen die Anzahl eine gerade

$$a,\ aq,\ aq^2,\ \ldots,\ aq^n,\ aq^{n+1},\ \ldots,\ aq^{2n+1},$$

in welchem Falle zwei mittlere Glieder $aq^n$, $aq^{n+1}$ vorhanden sind, so hat man

$$(aq^{2n+1} + a) - (aq^n + aq^{n+1}) = (aq^{n+1} - a)(q^n - 1) = (aq^n - a)(q^{n+1} - 1).$$

Für die Reihe 2, 6, 18, 54 ist danach

$$(54+2) - (18+6) = (18-2)(3-1) = (6-2)(9-1).$$

Misrachi berechnet sodann für jede der beiden Proportionen $a:b = c:d$ und $a:b = b:c$ ein Glied aus den übrigen. In den Beispielen beschränkt er sich dabei nicht auf ganze Zahlen, sondern er verwendet auch Brüche und gemischte Zahlen; er benutzt z. B. die beiden Proportionen

$$4/5 : 2/3 = 3/4 : 5/8,\quad 2\,1/2 : 3\,3/4 = 3\,3/4 : 5\,5/8.$$

Der Schluſs des II. Abschnitts ist der harmonischen Proportion gewidmet. Vier Zahlen $a$, $b$, $c$, $d$ bilden eine harmonische Proportion, wenn $(b - a) : (d - c) = a : d$ ist. Misrachi betrachtet aber nicht den allgemeinen Fall, sondern beschränkt sich auf die sogenannte stetige Proportion, bei welcher es sich nur um drei Zahlen $a$, $b$, $c$ handelt, die der Be-

dingung $(b - a) : (c - b) = a : c$ genügen. Zahlen dieser Art sind z. B. 3, 4, 6, da $(4 - 3) : (6 - 4) = 3 : 6$ ist.

Die Eigenschaften dieser Proportion, die Misrachi angiebt, sind folgende:

1. Das Verhältnis der kleinsten Zahl zur mittleren ist gröfser als das der mittleren zur gröfsten. So z. B. ist $^3/_4 > {}^4/_6$.

2. Die Summe der Produkte der mittleren Zahl in jede der beiden anderen ist gleich dem doppelten Produkte der ersten in die letzte. So z. B. ist $4.3 + 4.6 = 2.(3.6)$.

Nachdem noch gezeigt worden ist, wie jede der Zahlen $a, b, c$, welche der Proportion $(b - a) : (c - b) = a : c$ genügen, berechnet werden kann, wofern die beiden anderen gegeben sind, wird der Abschnitt mit der Bemerkung geschlossen, dafs ein tieferes Eingehen auf den Gegenstand nicht im Plane des Buches liege. Wer Genaueres darüber erfahren wolle, müsse sich speciell mit der Wissenschaft beschäftigen, welche diese Proportion betrachte, und das sei die Musik.

## 10. III. Abschnitt. Aufgaben.

Wie ich oben dargelegt habe, ist die Auflösung der gemischtquadratischen Gleichung bereits den Griechen gelungen, und wenn auch die Araber, welche später die Führung in der Mathematik übernahmen, die Theorie dieser Gleichungen in einigen Punkten vervollkommneten, so vermochten sie trotz aller Anstrengungen doch nicht, das Gebiet der Algebra zu erweitern; die Lösung der Gleichung dritten Grades ist erst den italienischen Mathematikern in der ersten Hälfte des 16. Jahrhunderts gelungen. Die Geschichte der Algebra hat also während mehr als 1500 Jahren zwar verschiedene Vertiefungen, aber keine bedeutende Ausdehnung zu verzeichnen; eine solche wurde von einigen Schriftstellern sogar für unmöglich erklärt.

Es kann nun nicht Wunder nehmen, dafs man, bei der Unfähigkeit, das Gebäude zu erweitern, darauf sann, verschiedene Verzierungen anzubringen, und als solche sind die kunstvoll eingekleideten Übungsaufgaben anzusehen, auf die schon die Inder und Griechen grofses Gewicht gelegt hatten, und denen auch die Araber, sowie die christlichen Mathematiker des Mittelalters ein ganz besonderes Interesse zuwandten. Die Werke von Leonardo Pisano und Paciuoli, ja noch der General trattato

von Tartaglia enthalten eine erstaunliche Menge solcher Aufgaben.

Diese eingekleideten Aufgaben sind nun zunächst insofern interessant, als sie uns einen gewissen Einblick in das Leben und Treiben der Menschen derjenigen Zeit gewähren, in welcher sie gestellt worden sind. Wenn man in dieser Beziehung Misrachis Sammlung mit denen seiner Zeitgenossen vergleicht, so fällt besonders auf, dafs gewisse, damals sehr beliebte Aufgabenkategorieen bei ihm vollständig fehlen. Bei Misrachi treffen wir keine Spieler, keine Beute teilenden Söldner verschiedener Nationalitäten, keine in der Schenke sitzenden Männer, Frauen und Jungfrauen, keine Zins nehmenden Gläubiger. Die aus dem bürgerlichen Leben genommenen Aufgaben, die er neben zahlreichen, rein mathematischen Aufgaben giebt, haben Münzvergleichungen, Arbeitslöhne, Erbschaftsteilungen, Kauf und Verkauf zum Gegenstande; auch fünf Gesellschaftsrechnungen finden sich vor. Da die eingekleideten Aufgaben auch für die Geschichte der Mathematik von Wert sind, indem sie vielfach über die Einwirkungen des einen Volkes auf ein anderes deutliche Fingerzeige geben, so habe ich bei den meisten Aufgaben Misrachis angegeben, in welchen älteren Werken sie sich ebenfalls vorfinden. Von den nach Misrachis Buch erschienenen Schriften habe ich dabei nur Beha-eddins Essenz der Rechenkunst berücksichtigt, als das letzte in arabischer Sprache verfafste mathematische Werk. Um zu zeigen, in welcher Weise Misrachi die Aufgaben behandelt, habe ich bei einigen auch seine Lösung ganz oder im Auszuge beigefügt.

In dem nachstehenden Verzeichnisse der Werke und Arbeiten, auf welche ich hier Bezug genommen habe, ist die Zeit der Abfassung, resp. die Lebenszeit des Verfassers in Parenthese angegeben. Der Name, unter welchem das Werk citiert wird, ist durch den Druck hervorgehoben:

1. Ein mathematisches Handbuch der alten Ägypter (*Papyrus Rhind* des British Museum), übersetzt und erklärt von Dr. A. Eisenlohr, Leipzig 1891 [etwa 1800 v. Chr.].

2. *Heronis* Alexandrini geometricorum et stereometricorum reliquiae, ed. F. Hultsch, Berlin 1864 [etwa 110 v. Chr.].

3. *Arithmetische Epigramme* der griechischen Anthologie. Anhang zu meiner Übersetzung der Werke Diophants, Leipzig 1890 [um 350 n. Chr.].

4. Algebra with Arithmetic and Mensuration from the Sanscrit of *Brahmegupta* [638 n. Chr.] and *Bháscara* [1160 n. Chr.], translated by Colebrooke. London 1817.

5. Propositiones ad acuendos juvenes aus *Alcuini* Opera, ed. Frobenius, Bd. II [780 n. Chr.].

6. The Algebra of *Mohammed Ben Musa.* Edited and translated by Frederic Rosen, London 1831 [820 n. Chr.].

7. Oeuvres de *Gerbert*, Pape sous le nom de Sylvestre II, par A. Olleris, Paris 1867 [um 985 n. Chr.].

8. Biernatzki, Die *Arithmetik der Chinesen.* Crelles Journal, Bd. 52.

9. *Kâfi fil Hisâb* (Genügendes über Arithmetik) des Abu Bekr Muhammed Ben Alhusein *Alkarkhî*, bearbeitet von Dr. A. Hochheim [1010 n. Chr.].

10. Extrait du *Fakhrî.* Traité d'algèbre par Aboû Bekr Mohammed Ben Alhaçan *Alkarkhî*, par F. Woepcke, Paris 1853 [1010 n. Chr.].

11. L'Algèbre d'Omar *Alkhayyami*, publiée par F. Woepcke, Paris 1851 [1078 n. Chr.].

12. *Joannis Hispalensis* Liber Algorismi de Pratica Arismetrice, Rom 1877 (Trattati d'aritmetica, pubblicati da Baldassarre Boncompagni) [1140 n. Chr.].

13. Sefer Ha-Mispar, Das Buch der Zahl, des R. *Abraham ibn Esra.* Herausgegeben von Dr. M. Silberberg, Frankfurt a. M. 1895 [kurz vor 1160 n. Chr.].

14. Scritti di *Leonardo Pisano*, pubblicati da Baldassarre Boncompagni. Rom 1857—1862 [1202—1228 n. Chr.].

15. Le Talkhys d'*Ibn Albannâ*, traduit par Aristide Marre (Atti dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei 1864) [um 1255 n. Chr. geboren].

16. Das Rechenbuch des *Maximus Planudes.* Aus dem Griechischen übersetzt von Dr. H. Wäschke, Halle 1878 [1330 n. Chr.].

17. Die von Maximilian Curtze in der Bibliotheca math. 1895 aus einer Handschrift des 14. Jahrhunderts veröffentlichten *arithmetischen Scherzaufgaben.*

18. Traité d'arithmétique d'Aboûl Haçan Ali Ben Mohammed *Alkalçâdi*, Rom 1859 [1460 n. Chr.].

19. Le Triparty en la science des nombres par Maistre *Nicolas Chuquet* Parisien, Rome 1881. Dazu als Anhang: Problèmes numériques, Rome 1882 [1484 n. Chr.].

20. *Johannes Widman* von Eger, Behend und hüpsch Rechnung uff allen Kauffmanschafften, Pforzheim 1508 [erste Ausgabe 1489].

21. *Luca Paciuolo*, Summa de Arithmetica Geometria Proportioni et Proportionalita, Venedig 1494.

22. Die Cofs *Christoffs Rudolffs*. Mit schönen Exempeln der Cofs durch Michael Stifel Gebessert und sehr gemehrt, Amsterdam 1615 [erste Ausgabe 1525].

23. Essenz der Rechenkunst von Mohammed *Beha-eddin*, arabisch und deutsch von G. H. F. Nesselmann, Berlin 1843 [1547 — 1622].

## I. Teil. Arithmetische Aufgaben. 1. Kap. Aufgaben, die mittels Regeldetri gelöst werden.

1. Wenn 4 (Geldstücke) von Konstantinopel gleich 6 von Brussa, und 9 von Brussa gleich 6 von Adrianopel sind, wieviel von Konstantinopel sind dann 7 von Adrianopel?

2. Jemand mietet einen Arbeiter, dafs er ihm 13 Centner einen Weg von 17 Mil[1]) weit für 19 Peschutim[2]) fortschaffe. Derselbe bringt 7 Centner 11 Mil weit. Wieviel Lohn erhält er? [Abraham ibn Esra, S. 54; ganz ähnlich Bháscara, S. 37, Nr. 84.]

3. Jemand hat 6 Arbeiter auf 4 Tage für im ganzen 12 Peschutim Lohn gemietet. Wieviel erhalten 3 von ihnen, wenn sie 2 Tage gearbeitet haben?

4. Wenn zu einer Geldsumme $^1/_9$ und $^1/_{10}$ derselben hinzugefügt wird, so kommt 50 heraus. Wie grofs ist die Summe? [Abraham ibn Esra, S. 40; mit anderen Zahlen mehrfach im Papyrus Rhind, z. B. S. 52; Christoff Rudolff, S. 297.]

5. Eine Geldsumme beträgt 50. Wir nehmen $^1/_5$, $^1/_7$ und $^1/_9$ derselben. Wieviel haben wir genommen? [Abraham ibn Esra, S. 40.]

6. Wenn zu einer Geldsumme $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_5$ und $^1/_6$ derselben addiert wird, so kommt 40 heraus. Wie grofs ist die Summe? [Abraham ibn Esra, S. 41.]

7. Wenn wir zu einer Summe ihre Hälfte, $^1/_3$ der Hälfte, $^1/_5$ des Drittels der Hälfte und $^1/_6$ vom Fünftel des Drittels

[1]) 1 Mil = 12000 Faustbreiten = 1087,5 m (ungefähr).

[2]) Paschut, kleinste Münze.

der Hälfte addieren, so kommt 40 heraus. Wie groſs ist die Summe?

8. Wie groſs ist eine Geldsumme, deren 9ter und 7ter Teil zusammen 7 sind? [Abraham ibn Esra, S. 50; mit anderen Zahlen Papyrus Rhind, S. 48; Alkalçâdi, S. 48, resp. 415[1]).]

9. Wie groſs ist eine Geldsumme, von welcher 7 übrig bleibt, wenn wir den 9ten und den 7ten Teil wegnehmen? [Abraham ibn Esra, S. 50; mit anderen Zahlen Alkalçâdi, S. 49, resp. 415[1]); Christoff Rudolff, S. 339.]

10. Jemand geht an einer Schar von Männern vorbei und sagt zu ihnen: Seid gegrüſst, ihr 100 Männer! Da antworten sie ihm und sagen: Wir sind nicht 100, sondern wir und noch einmal so viele und noch $^1/_2$ und $^1/_4$ mal so viele und du dazu, das sind erst 100. Wieviel Männer waren es? [Abraham ibn Esra, S. 41; Alcuin II; mit anderen Konstanten und statt Männer beziehungsweise Störche, Pferde, Lebensjahre, Schafe, Tauben und Schüler auch Alcuin, Prop. III, IV, XXXVI, XL, XLIV, XLV, XLVIII; Leonardo Pisano I, S. 177; Christoff Rudolff, S. 369.]

11. Wenn eine Saah[2]) Mehl 12 Peschutim kostet, so erhält man für ein 1 Paschut 8 Litra[3]). Wieviel Litra erhält man für 1 Paschut, wenn eine Saah 11 Peschutim kostet?

12. Ein Faſs hat drei Öffnungen, die sich alle unten am Faſs befinden, so daſs dasſelbe durch jede von ihnen geleert werden kann. Durch die erste Öffnung würde das Faſs in $^1/_3$, durch die zweite in $^2/_3$, durch die dritte in $^3/_4$ Tag geleert werden. In welchem Teile des Tages wird das Faſs leer, wenn alle drei Öffnungen zugleich geöffnet werden? [Aufgaben wie diese und die beiden folgenden zuerst bei Heron, S. 194; ferner mehrfach in „Arithmetische Epigramme“, z. B. Nr. 23; Bháscara, S. 42; Alkarkhî, Fakhrî, S. 83; Leonardo Pisano I, S. 183; Mohammed Beha-eddin, S. 49; Luca Paciuolo, fol. 153 recto; Johannes Widmann, fol. 91.]

13. Ein Teich ist mit Wasser gefüllt. Oben ist eine Röhre, die hinein mündet und ihn, wenn er leer wäre, in $1^1/_2$ Tagen

---

[1]) Diese Zahlen beziehen sich auf den Abdruck des Werkes in den Atti dell' Accademia de' Nuovi Lincei XII.

[2]) 1 Saah (Hohlmaſs) = 144 mittelgroſsen Hühnereiern = ungefähr 6 Liter.

[3]) 1 Litra = ungefähr 134,40 gm.

füllen würde. Am Boden ist eine zweite Röhre, durch die er in einem Tage geleert werden kann. In welcher Zeit wird der Teich leer, wenn beide Röhren zugleich geöffnet werden?

14. Ein Teich ist mit Wasser gefüllt. Oben sind drei Röhren, die hinein münden. Die eine kann ihn in $1\frac{1}{2}$, die zweite in $1\frac{1}{4}$, die dritte in $1\frac{2}{5}$ Tagen füllen. Aufserdem sind am Boden vier Öffnungen, die ihn entleeren können, und zwar die erste in $\frac{1}{2}$, die zweite in $\frac{2}{3}$, die dritte in $\frac{3}{4}$, die vierte in $\frac{4}{5}$ Tagen. In welcher Zeit wird der Teich leer, wenn sowohl die drei Röhren, die hinein münden, als auch die vier Oeffnungen, die ihn entleeren, geöffnet werden?

15. Einer sagt zum anderen: Wenn du mir 1 giebst, so habe ich soviel wie du. Der andere sagt: Wenn du mir 1 giebst, so habe ich doppelt soviel wie du. Wieviel hat jeder? [Mit teilweise anderen Zahlen: Arithmetische Epigramme, 38 und 39; Alcuin, 16; Bháscara, S. 191; Alkarkhî, Kâfî fîl Hisâb III, S. 15; Leonardo Pisano I, S. 190 ff.; Nicolas Chuquet, Problème 57; Johannes Widmann, fol. 81; Christoff Rudolff, S. 442.]

16. Jemand hat eine Ware für sein Geld gekauft, und zwar $\frac{3}{5}$ Litra für ein Goldstück. Im Verkauf hat er $\frac{4}{7}$ Litra für 1 Goldstück gegeben und dabei einen Gewinn von 1 Goldstück gemacht. Wieviel hat er in dem Handel angelegt? [Abraham ibn Esra, S. 42; mit anderen Zahlen Leonardo Pisano I, S. 179.]

17. Ein Wechsler hat drei Arten Münzen; von der ersten gehen 5, von der zweiten 7 und von der dritten 9 auf ein Goldstück. Nun verlangt jemand von dem Wechsler, dafs er ihm ein Goldstück wechsle und ihm dafür von jenen drei Arten Münzen gebe, von allen gleichviel. Wieviel erhält er von jeder Art? [Abraham ibn Esra, S. 52.]

18. Ein Herr schickt einen Läufer aus, der jeden Tag 29 Mil geht, und nach 10 Tagen schickt er einen zweiten Läufer hinterher, der täglich 35 Mil zurücklegt. Wann wird dieser den ersteren einholen? [Abraham ibn Esra, mit einer anderen Zahl, S. 56.]

19. Wie hoch ist ein Baum, von dem $\frac{1}{7}$ im Wasser und $\frac{1}{9}$ in der Erde steht, und der noch 8 Ellen über das Wasser hinausragt? [Abraham ibn Esra, S. 60; ähnlich Leonardo Pisano I, S. 173; Beha-eddin, S. 50; mathematische Scherz-

aufgaben 16 u. 30; Nicolas Chuquet, Problème 19; Johannes Widmann, fol. 102; Christoff Rudolff, S. 337.]

Lösung. Die Aufgabe besteht aus einer Addition, einer Subtraktion und einem Regeldetri-Schluſs. Wir verfahren in folgender Weise: Wenn wir $^1/_9$ und $^1/_7$ addieren, so erhalten wir $^{16}/_{63}$; wird dies von 1 abgezogen, so bleibt $^{47}/_{63}$ übrig. Nun schlieſsen wir und sagen: Wenn $^{47}/_{63}$ gleich 8 ist, wieviel ist dann 1? Und es kommt $10^{34}/_{47}$ heraus.

20. Jemand hat 10 Maſs Most und will ihn so lange gären lassen, bis noch $^1/_3$ davon übrig ist. Während des Gärens, im Augenblick, wo noch 8 Maſs übrig sind, werden 6 Maſs verschüttet, so daſs noch 2 übrig bleiben. Diese lässt er so weiter gären, wie es anfangs beabsichtigt war. Wieviel bleibt dann von den 2 Maſs übrig? [Mit anderen Zahlen Abraham ibn Esra, S. 58; ganz ähnlich Nicolas Chuquet, Problème 147.]

21. Jemand hat das Gelübde gethan, er wolle an jedem Tage, an welchem ihm Gott sein Geld verdoppelte, den Armen 2 Peschutim geben. Nun hat sich sein Geld 4 Tage hinter einander verdoppelt, und jeden Tag hat er den Armen 2 Peschutim gegeben. Da war all sein Geld hingegeben. Wieviel hatte er anfangs gehabt? [Abraham ibn Esra, S. 56; ähnlich Bháscara, S. 196; Leonardo Pisano I, S. 258 u. 329; mathematische Scherzaufgaben 5.]

22. Jemand reist in eine überseeische Provinz. Für sein Getreide läſst er einen Verwalter zurück, der dem Priester $^1/_{50}$, dem Leviten $^1/_{10}$ geben und das übrige ihm bewahren soll. Als er zurückkam, empfing er von dem Verwalter 100 Saah. Wieviel Getreide hatte er gehabt?

23. Wenn man $^1/_3$ einer Zahl mit ihrem Viertel — oder irgend zwei andere Bruchteile der Zahl mit einander — multipliziert, so ist das Resultat gleich einer gegebenen ganzen Zahl, oder gleich einem gegebenen Bruche, oder gleich dem Doppelten einer ganzen Zahl, oder gleich dem Doppelten eines Bruches. Wie findet man die Zahl? [Christoff Rudolff, S. 580.]

24. Wenn man $^1/_3$ einer Zahl mit ihrem Viertel — oder irgend zwei andere Bruchteile der Zahl mit einander — multipliziert, so ist das Produkt gleich jener Zahl und 7 — oder gleich ihrem Doppelten, vermehrt um irgend eine Zahl. Wie findet man die Zahl?

Diese Aufgabe gehört eigentlich in den folgenden Abschnitt, da sie zu der Gleichung

$$\frac{x}{a} \cdot \frac{x}{b} = cx + d, \text{ d. i. } \frac{x^2}{ab} = cx + d$$

führt. Misrachi will hier auch nur die etwa vorhandenen rationalen Lösungen ermitteln. Er schliefst folgendermafsen: Wenn ein $(ab)$tel von $x^2$ sich von $cx$ um $d$ unterscheidet, so mufs sich $x^2$ von $abcx$ um $abd$ unterscheiden. Es ist also

$$x^2 - abcx = abd \text{ oder } x(x - abc) = abd.$$

Daher mufs die Zahl $abd$ auf alle möglichen Arten in je zwei Faktoren zerlegt werden. Findet sich ein Faktorenpaar, bei welchem der eine Faktor den anderen um $abc$ übertrifft, so ist der gröfsere der beiden der gesuchte Wert von $x$.

Als Beispiel behandelt Misrachi die Gleichung

$$\frac{x}{2} \cdot \frac{x}{4} = x + 6.$$

Durch seinen Regeldetri-Schlufs findet er

$$x^2 - 8x = 48, \text{ d. i. } x(x - 8) = 48.$$

Nun liefert 48 die fünf Zerlegungen

$$1.48,\ 2.24,\ 3.16,\ 4.12,\ 6.8.$$

Die vierte derselben, d. i. 4.12, genügt der Bedingung, da $12 - 4 = 8$ ist. Somit hat die Aufgabe die Lösung $x = 12$.

25. Jemand verkauft auf dem Markte drei Arten Zucker, und zwar die beste Art für 5 Lebanim [1]) das Rottel [1]), die mittlere für 3 Lebanim das Rottel und die geringste 7 Rottel für 1 Laban. Nun kauft jemand von den drei Arten, von jeder gleichviel, und bezahlt dafür im ganzen 10 Lebanim. Wieviel hat er von jeder Art genommen?

26. Auf dem Markte werden drei Arten Zucker verkauft, die wertvollste für 5 Lebanim das Rottel, die mittlere für 3 Lebanim das Rottel, die geringste 6 Rottel für 1 Laban. Jemand kauft von allen drei Arten, im ganzen 6 Rottel, und bezahlt dafür 10 Lebanim. Wieviel hat er von jeder Art genommen?

27. Es hat jemand sein Geld in zwei Teile geteilt, der eine Teil ist $^3/_5$, der andere $^2/_5$ des Ganzen. Für den ersten Teil

---

[1]) Laban (Weifspfennig), eine Silbermünze; Rottel, ein türkisches Gewicht.

kauft er eine Ware und erhält für 1 Laban 10 Litra; für den zweiten Teil kauft er ebenfalls eine Ware und erhält für 1 Laban 6 Litra. So hat er im ganzen 200 Litra gekauft. Wieviel Geld hat er ausgegeben?

28. Drei Männer hatten zusammen ein Geschäft. Der erste hatte $12\frac{1}{2}$, der zweite $6\frac{1}{3}$, der dritte $7\frac{1}{2}$ eingelegt. Der Gewinn betrug $45\frac{1}{2}$. Wieviel erhielt jeder vom Gewinn? [Gesellschaftsrechnungen wie Nr. 28 bis 30 bei Leonardo Pisano I, S. 139 ff.; Johannes Hispalensis II, S. 111; Alkalçadi, S. 257 ff.; Luca Paciuolo, fol. 155 verso; Johannes Widmann, fol. 124; Christoff Rudolff, S. 499.]

29. Drei Männer hatten zusammen ein Jahr lang ein Geschäft, in welches jeder dieselbe Summe einschofs, nur dafs der zweite sein Geld erst nach 3, der dritte nach 6 Monaten hergab. Es war also das Geld des ersten 12, das des zweiten 9, das des dritten 6 Monate im Geschäft. Sie erzielten einen Gewinn von $45\frac{1}{2}$. Wieviel erhielt jeder?

30. Drei Männer hatten zusammen ein Geschäft. Der erste schofs 12 ein und blieb ein Jahr in der Gesellschaft; der zweite setzte 4 Monate nach Beginn des Jahres 6, der dritte 8 Monate nach Beginn des Jahres 7 ein. Am Ende des Jahres hatten sie einen Gewinn von 45. Wieviel erhielt jeder vom Gewinn?

31. Drei Männer hatten zusammen ein Geschäft und setzten unter einander fest, dafs der erste $\frac{1}{2}$, der zweite $\frac{1}{3}$, der dritte $\frac{1}{4}$ des Gewinnes erhalten sollte. Der Gewinn betrug 12. Wieviel erhielt jeder? [Misrachi fügt hinzu, dafs die Aufgabe unmöglich sei, weil $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1$ ist.]

32. Drei Männer hatten zusammen ein Geschäft, in das sie verschiedene Summen einschossen. Die Einlage eines jeden gaben sie in einem Schriftstücke an, damit man wisse, wieviel jeder eingelegt. Als sie später den Ertrag teilen wollten, suchten sie dieses Schriftstück und fanden es nicht; auch hatten sie die Summe, die jeder in das Geschäft gesteckt hatte, vergessen. Sie erinnerten sich nur, dafs die Einlage des ersten und zweiten zusammen gleich der des dritten war, und dafs der erste und der dritte zusammen 100mal so viel eingelegt hatten, als der zweite. Wie konnten sie jetzt die Einlage jedes einzelnen finden?

33. Jemand sagt: Wenn Ruben 20 Tage für mich arbeiten wird, so werde ich ihm 5 Goldstücke geben; dem Simeon werde

ich für 20 Tage 4 und dem Levi 3 Goldstücke geben. Da gingen alle drei hin und arbeiteten, und es stand ein Schreiber dabei, der die Stunden und Tage, die jeder arbeitete, aufschrieb. Alle drei hatten zusammen 20 volle Tage gearbeitet, und jedem wurde dieselbe Summe bezahlt. Wieviel Geld bekam jeder, und wieviel Tage und Stunden hatte jeder gearbeitet? [Abraham ibn Esra, S. 57.]

34. Ruben, Simeon, Levi und Juda zeigten jeder einen Brief ihres Vaters vor. In dem Briefe des Ruben stand, dafs sein Vater Jacob ihm seine sämtlichen Felder als Geschenk (eines Schwerkranken) vermache; in dem Briefe des Simeon stand, dafs sein Vater ihm die Hälfte seiner Felder vermache, in dem des Levi, dafs sein Vater ihm $1/3$ der Felder vermache, endlich in dem des Juda, dafs sein Vater ihm $1/4$ der Felder vermache. Die Zeit der Ausstellung der Briefe war dieselbe. [Wie waren die Felder zu teilen?] Nach jüdischem Recht kann jeder von ihnen nach seiner Forderung nehmen, nach dem Recht der anderen Völker nur nach dem Verhältnisse seiner Forderung zur Forderung der anderen. [Abraham ibn Esra, S. 60.]

Misrachi löst die Aufgabe zunächst unter letzterer Voraussetzung und erhält $12/25$, $6/25$, $4/25$, $3/25$. Dann zeigt er, wie die jüdischen Gelehrten (vgl. Fall II der ersten Mischnah im Traktat בבא מציעא) die Teilung vornehmen würden. Juda, der jüngste, müsse $1/16$ bekommen, weil die drei älteren Brüder sagen: „Du forderst $1/4$ des Ganzen, an dieses Viertel hat jeder von uns denselben Anspruch wie du, folglich erhält jeder $1/4$ des Viertels, d. i. $1/16$.“ Damit ist Juda abgefunden. Weiter fordert Levi $1/3$; da aber $1/4$ schon verteilt ist, so kann er nur noch $1/3 - 1/4 = 1/12$ beanspruchen. An dieses Zwölftel haben aber die beiden älteren Brüder denselben Anspruch wie Levi. Dieser erhält also nur noch $1/36$ zu dem schon erhaltenen $1/16$, d. i. im ganzen $13/144$. Ferner soll Simeon die Hälfte erhalten, oder, da er schon seinen Teil von dem Drittel genommen hat, $1/2 - 1/3 = 1/6$. Denselben Anspruch hat aber auch noch Ruben, somit erhält Simeon nur noch die Hälfte von $1/6$, d. i. $1/12$, also im ganzen $1/12 + 1/36 + 1/16 = 25/144$. Es bleibt danach für Ruben $97/144$ übrig.

35. Ruben, Simeon und Levi sind auf den Fischmarkt gegangen und sehen einen Fisch, den sie kaufen wollen. Ruben sagt zu seinen zwei Freunden: Wenn ich all mein Geld hergebe und jeder von euch die Hälfte dessen, was er hat, so

können wir zusammen den Fisch kaufen. Da antwortet Simeon: Wenn ich all mein Geld gebe und jeder von euch $^1/_3$ dessen, was er hat, so können wir den Fisch kaufen. Levi endlich sagt: Wenn ich all mein Geld hergebe und jeder von euch $^1/_4$ dessen, was er hat, so können wir zusammen den Fisch kaufen. In welchem Verhältnisse steht das Geld eines jeden zu dem des anderen? [Aufgaben wie diese und die folgende Leonardo Pisano I, S. 240 ff.; Alkarkhî, Kâfî fil Hisâb III, S. 16; Beha-eddin, S. 51; mathematische Scherzaufgaben 17; Johannes Widmann, fol. 136; Christoff Rudolff, S. 430 ff., 511, 517.]

36. Ruben, Simeon und Levi gehen auf den Fischmarkt und sehen einen Fisch. Da sagt Ruben: Wenn ihr all euer Geld hergebt und ich die Hälfte des meinigen dazulege, so können wir den Fisch kaufen. Simeon sagt: Wenn ihr all euer Geld hergebt und ich $^1/_3$ des meinigen dazulege, so können wir den Fisch kaufen. Levi sagt: Wenn ihr all euer Geld hergebt und ich $^1/_4$ des meinigen dazulege, so können wir den Fisch kaufen. Wieviel kostete der Fisch, und wieviel Geld hatte jeder?

37. Dem Ruben, Simeon und Levi ist eine Erbschaft zugefallen, von welcher dem Ruben $^1/_2$, Simeon $^1/_3$ und Levi $^1/_6$ zukommt. Nun kommen sie und nehmen ein jeder von der Erbschaft, soviel er kann. Dann gehen sie vor Gericht, damit jeder den ihm zukommenden Anteil erhalte. Das Gericht bestimmte, dafs Ruben $^1/_2$, Simeon $^1/_3$ und Levi $^1/_6$ dessen, was sich jeder angeeignet hatte, niederlegen sollte, teilte dann dieses alles in drei gleiche Teile, und jeder der drei erhielt einen dieser Teile. Auf diese Weise hatte jeder den ihm zukommenden Teil der Erbschaft erhalten. Wieviel hatte jeder genommen, bevor sie vor Gericht kamen? [Alkarkhî, Fakhrî, S. 90 und 141; Leonardo Pisano I, S. 335 und II, S. 234.]

38. Wir nehmen von einer beliebigen Zahl einen Teil weg, zerlegen ihn in vier verschiedene Teile, vergröfsern den ersten dieser Teile um seine Hälfte, den zweiten um sein Drittel, den dritten um sein Viertel und den vierten um sein Sechstel, und addieren die so vergröfserten Teile. Wenn nun die erhaltene Summe gleich der anfangs genommenen Zahl ist, wie grofs sind dann die Teile vor und wie grofs nach der Vergröfserung?

Misrachi sieht, dafs die Aufgabe unbestimmt ist, d. h. be-

liebig viele Lösungen zuläfst. Er findet z. B., dafs, wenn die gegebene Zahl 20 ist, die Teile vor der Vergröfserung

$$^{240}/_{151},\ ^{480}/_{151},\ ^{720}/_{151},\ ^{960}/_{151},$$

nach derselben

$$^{360}/_{151},\ ^{640}/_{151},\ ^{900}/_{151},\ ^{1120}/_{151},$$

oder auch vor der Vergröfserung

$$2^{2}/_{19},\ 3^{3}/_{19},\ 4^{4}/_{19},\ 6^{6}/_{19},$$

nach derselben

$$3^{3}/_{19},\ 4^{4}/_{14},\ 5^{5}/_{19},\ 7^{7}/_{19}$$ sind.

39. Drei Leute, die zusammen ein Geschäft haben, wollen in dasselbe einschiefsen, jeder dieselbe Summe wie der andere. Sie hatten Gold und legten zusammen 50 Litra ein. Es war aber ein Rottel vom Golde des ersten 3, ein Rottel von dem des zweiten 5, ein Rottel von dem des dritten 8 Goldstücke wert. Wieviel Litra hat jeder von den 50 Litra, die sie zusammen einschossen, hergegeben, so dafs die Zahl der Goldstücke für jeden die gleiche ist?

40. Vier Männern fiel eine Erbschaft zu; dem ersten gebührte $^{1}/_{2}$, dem zweiten $^{1}/_{3}$, dem dritten $^{1}/_{4}$ und dem vierten $^{1}/_{12}$. Der erste und der vierte nahmen ihren Anteil und gingen weg. Da waren von der Erbschaft noch 9 Goldstücke für den zweiten und dritten übrig. Dem einen kam $^{1}/_{3}$, dem anderen $^{1}/_{4}$ der gesamten Erbschaft zu. Wieviel bekam jeder von den 9 Goldstücken, die noch übrig waren?

## 2. Kapitel. Aufgaben, die ohne Regeldetri gelöst werden.

41. Jemand hat für 100 Goldstücke 100 Litra einer Ware gekauft. Er verkauft dann 50 Litra und zwar $^{5}/_{4}$ Litra für 1 Goldstück. Von den anderen 50 Litra giebt er $^{3}/_{4}$ Litra für 1 Goldstück her. Hat er Gewinn oder Schaden gehabt? [Abraham ibn Esra, S. 42; Leonardo Pisano I, S. 281; ähnlich Alcuin, Prop. VI.]

42. Zwei Städte sind 100 Mil von einander entfernt. Zwei Männer brechen in demselben Augenblicke auf und gehen einander entgegen. Der eine macht täglich 19, der andere 17 Mil. Wann werden sie sich treffen? [Abraham ibn Esra, S. 56; Nicolas Chuquet, probl. 22; Christoff Rudolff, S. 423.]

Lösung. Diese Aufgabe ist zu lösen durch eine Addition und eine Division. Wir addieren 17 und 19, das giebt 36, und das ist der Weg für einen Tag. Dann teilen wir durch 36 die 100 Mil, die zwischen den beiden Städten sind, und da kommt $2^{28}/_{36} = 2^{7}/_{9}$ heraus.

43. Wie findet man die Reihe der Zahlen, für deren jede die Summe der Divisoren um eine gerade Zahl gröfser ist als die Zahl selbst? Wie findet man weiter die Reihe der Zahlen, für welche die Summe um eine gerade Zahl kleiner ist als die Zahl? Wie endlich die Reihe der vollkommenen Zahlen, d. i. derjenigen, bei welchen die Summe der Divisoren der Zahl selbst gleich ist?

Bei der Beantwortung dieser Fragen hat Misrachi einen bekannten Satz Euklids (Elemente IX, 36) vor Augen. Werden nämlich die Glieder der Reihe

(I) 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, . . .

immer von 1 an addiert, so werden die erhaltenen Summen

(II) 3, 7, 15, 31, 63, 127, . . .

zum Teil Primzahlen sein, wie 3, 7, 31, 127, u. s. w., zum Teil zusammengesetzt, wie 15, 63, u. s. w. Multipliziert man nun eine solche Summe, die Primzahl ist, mit der darüber stehenden Zahl der Reihe (I), so erhält man immer eine vollkommene, d. i. eine solche Zahl, deren Divisorensumme der Zahl gleich ist. Es ist also $3.2 = 6$ die erste, $7.4 = 28$ die zweite, $31.16 = 496$ die dritte, $127.64 = 8128$ die vierte vollkommene Zahl, u. s. w. In der That ist

$$1 + 2 + 3 = 6,\quad 1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28, \text{ u. s. w.}$$

Multipliziert man aber ein Glied der Reihe (I) nicht mit der in (II) darunter stehenden Zahl, sondern mit einer anderen Primzahl, so wird das Produkt keine vollkommene Zahl sein. Wenn die gewählte Primzahl gröfser als die betreffende Zahl von (II) ist, so wird das Produkt eine mangelhafte Zahl sein, d. h. eine solche, deren Divisorensumme kleiner als die Zahl ist. Ist aber die gewählte Primzahl kleiner als die betreffende Zahl von (II), so wird das Produkt eine überschiefsende Zahl sein, d. h. eine solche, deren Divisorensumme mehr als die Zahl beträgt. Es ist also z. B., da $11 < 15$, aber $17 > 15$ ist, $8.11 = 88$ überschiefsend, $8.17 = 136$ mangelhaft. In der That ist

$$1 + 2 + 4 + 8 + 11 + 22 + 44 = 92 > 88$$

und

$$1 + 2 + 4 + 8 + 17 + 34 + 68 = 134 < 136.$$

Euklid spricht a. a. O. nur von den vollkommenen Zahlen (ἀριθμοὶ τέλειοι); die Begriffe überschiefsende Zahlen (ἀ. ὑπερτελεῖς) und mangelhafte Zahlen (ἀ. ἐλλιπεῖς) rühren von Nikomachus (I, 14—16) her.

Dafs das von Misrachi dargelegte Verfahren, wenn es auch keine vollständige Lösung der Aufgabe giebt, doch immer Zahlen der verlangten Art liefert, und dafs die Differenz zwischen der Zahl und ihrer Divisorensumme stets gerade sein wird, läfst sich leicht beweisen.

Ist nämlich $q$ eine Primzahl, so haben die Divisoren der Zahl $m = 2^\alpha q$, diese Zahl selbst mitgerechnet, die Summe

$$(1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^\alpha)(1 + q) = (2^{\alpha+1} - 1)(1 + q);$$

für die Summe der Divisoren mit Ausschlufs der Zahl erhält man also

$$S = (2^{\alpha+1} - 1)(1 + q) - 2^\alpha q = (2^\alpha - 1)q + (2^{\alpha+1} - 1).$$

Wenn nun $q = 2^{\alpha+1} - 1$ ist, so wird

$$S = (2^\alpha - 1)q + q = 2^\alpha q,$$

d. h. $m = 2^\alpha q$ ist eine vollkommene Zahl.

Wenn dagegen $q \lessgtr 2^{\alpha+1} - 1$, also $q = 2^{\alpha+1} - 1 \mp \mu$ ist, wo $\mu$ eine positive Zahl bezeichnet, die offenbar gerade sein mufs, so wird

$$\begin{aligned} S &= (2^\alpha - 1)(2^{\alpha+1} \dot{-} 1) \mp (2^\alpha - 1)\mu + (2^{\alpha+1} - 1) \\ &= (2^{\alpha+1} - 1)2^\alpha \mp 2^\alpha \mu \pm \mu = 2^\alpha (2^{\alpha+1} - 1 \mp \mu) \pm \mu \\ &= 2^\alpha q \pm \mu, \end{aligned}$$

d. h. $2^\alpha q$ ist überschiefsend oder mangelhaft, je nachdem das obere oder untere Zeichen genommen wird. Da überdies $\mu$ eine gerade Zahl ist, so ist $S$, also auch $S - m$ gerade.

44. Jemand sagt: Ich habe mein Geld verdoppelt und 12 ausgegeben; das jetzt übrig gebliebene habe ich wieder verdoppelt und 12 ausgegeben; da hatte ich noch 12 übrig. Wieviel hat er gehabt? [Leonardo Pisano I, S. 258 ff., S. 329; Nicolas Chuquet, probl. 31; Johannes Widmann, fol. 94.]

45. Jemand sagt: Ich habe die Hälfte meines Geldes und noch 1 ausgegeben; von dem Reste habe ich die Hälfte und noch 1 ausgegeben; von dem dann entstandenen Reste habe ich

auch die Hälfte und noch 1 ausgegeben, und da ist mir 1 übrig geblieben. Wieviel hat er besessen? [Nicolas Chuquet, probl. 28.]

46. Jemand sagt: Ich habe alle natürlichen Zahlen bis zu einer gewissen Zahl addiert, und als Summe ist 465 herausgekommen. Welches war die letzte Zahl? [Abraham ibn Esra, S. 25; ähnlich Christoff Rudolff, S. 653.]

Lösung. Wir verdoppeln die Summe, das giebt 930; dann ziehen wir die Quadratwurzel aus der Quadratzahl, die 930 vorausgeht, und das giebt 30. Dies ist die letzte Zahl. Sorgfältiger löst Abraham ibn Esra die Aufgabe: Verdoppele immer die Summenzahl, nimm die Wurzel des der doppelten Summe vorhergehenden Quadrates und prüfe sie: Bleibt nämlich zwischen dem Quadrate und der doppelten Summe ebensoviel wie die Wurzel, weder mehr noch weniger, so weifst du, dafs die Zahl richtig ist, und die Zahl ist die Wurzel selbst. Wir verdoppeln also 465, da kommt 930 heraus. Es ist bekannt, dafs das vorhergehende Quadrat 900 ist, dessen Wurzel 30, und dies ist die letzte der addierten Zahlen; denn zwischen dem Quadrat und der doppelten Summe ist die Differenz ja gerade 30, und dies ist die letzte Zahl.

47. Jemand sagt: Ich addiere die Kuben der natürlichen Zahlen bis zu einer gewissen Grenze, und es kommt als Summe 225 heraus. Welches ist die letzte Kubikzahl, die genommen wurde?

48. Wenn ein Schekel[1]) 40 Lebanim wert ist, und jemand hat seinem Freunde ein Stück Gold von 100 Schekalim gegeben, um davon soviel zu verkaufen, dafs die Zahl der übrig gebliebenen Goldschekalim gleich der Zahl der Lebanim ist, welche er für das verkaufte Gold erhalten hat, wieviel Gold hat er dann von dem Stück verkauft?

Lösung. Zu 40 fügen wir 1 hinzu und dividieren 100 durch die erhaltene Zahl 41. Was herauskommt, ist das Gewicht des verkauften Goldes.

Wenn 1 Schekel 55 Lebanim gilt, so addieren wir 1 zu 55, das giebt 56, und damit dividieren wir in 100.

49. Jemand hat seinem Freunde ein Stück Gold gegeben, damit er soviel davon verkaufe, dafs die Zahl der Lebanim,

---

[1]) 1 Schekel = ungefähr 12,80 gm (1 Litra = $10\frac{1}{2}$ Schekel).

welche das verkaufte Gold wert ist, gleich sei der Zahl der übrig behaltenen Goldschekalim. Diese letztere Zahl ist nun $97^{23}/_{41}$. Für wieviel Lebanim hat er dann das Schekel Gold verkauft, und wie groſs war das ganze Stück? [Misrachi nimmt stillschweigend als Wert eines Schekel 40 Lebanim an, dann sind $97^{23}/_{41} : 40 = 2^{18}/_{41}$ Schekel verkauft, das Stück wog also $97^{23}/_{41} + 2^{18}/_{41} = 100$ Schekel.]

50. Welches ist die Quadratzahl, welche 39 giebt, wenn sie zum 10fachen ihrer Wurzel addiert wird? [Mohammed ben Musa, S. 13; Alkarkhî, Kâfî fîl Hisâb III, S. 11; Alkarkhî, Fakhrî, S. 65 u. 66; Alkhayyami, S. 17; Johannes Hispalensis, S. 112; Leonardo Pisano I, S. 407.]

Lösung. Wir multiplizieren die Zahl der Wurzeln mit sich selbst, das giebt 100. Diese Zahl 100 multiplizieren wir mit 39, da kommt 3900 heraus, und das merken wir uns.

Dann multiplizieren wir die Hälfte von 100 mit sich selbst, das giebt 2500. Dies addieren wir zu dem, was wir uns gemerkt haben, und erhalten 6400. Daraus ziehen wir die Wurzel, das ist 80. Dies ziehen wir ab von der Zahl, die entsteht, wenn wir 50, d. i. die Hälfte von 100, zu 39 addieren, also von 89. Da bleibt 9 übrig, und das ist die gesuchte Quadratzahl; ihre Wurzel ist 3.

Oder, wenn dir ein anderer Weg besser gefällt, so nehmen wir die Hälfte der Anzahl der Wurzeln und multiplizieren sie mit sich selbst. Was herauskommt, addieren wir zu der Zahl, welche gleich der Summe der Quadratzahl und ihrer 10fachen Wurzel ist. Aus dem Resultate ziehen wir die Wurzel und subtrahieren von derselben die halbe Anzahl der Wurzeln. Was herauskommt, ist die Wurzel der gesuchten Quadratzahl.

Misrachi lehrt dann weiter, wie Aufgaben, in denen von einem Vielfachen oder von einem Bruchteile einer Quadratzahl die Rede ist, durch Division oder durch Multiplikation auf den behandelten Fall zurückgeführt werden. Als Beispiele behandelt er zwei Aufgaben, von denen die erste in unserer Schreibweise $3x^2 + 12x = 180$, die zweite $^1/_3 x^2 + 3x = 30$ lautet, und welche, die erste durch Division mit 3, die zweite durch Multiplikation mit 3 in $x^2 + 4x = 60$ und $x^2 + 9x = 90$ übergehen.

51. Welches ist die Quadratzahl, die, zu 21 addiert, gleich dem 10fachen ihrer Wurzel ist? [Mohammed ben Musa, S. 16; Alkarkhî, Kâfî fîl Hisâb III, S. 12; Alkarkhî, Fakhrî S. 67.]

Lösung. Wir nehmen die Hälfte der Anzahl der Wurzeln und multiplizieren sie mit sich selbst; das giebt 25. Davon ziehen wir 21 ab; es bleibt 4 übrig. Aus dieser Zahl ziehen wir die Wurzel; das giebt 2. Dies ziehen wir von der Hälfte der Anzahl der Wurzeln ab und erhalten 3 als Rest. Das ist die Wurzel der gesuchten Quadratzahl. Multiplizieren wir dieselbe mit sich selbst, so kommt 9 heraus, und das ist die gesuchte Quadratzahl [1]).

Wenn das, was bei der Multiplikation der halben Anzahl der Wurzeln mit sich selbst herauskommt, gleich der mit der Quadratzahl verbundenen Zahl ist, so ist die Wurzel des gesuchten Quadrates gleich der halben Anzahl der Wurzeln.

Wenn das, was bei der Multiplikation der halben Anzahl der Wurzeln mit sich selbst herauskommt, weniger als die mit der Quadratzahl verbundene Zahl ist, so ist die Aufgabe zweifellos unmöglich.

Auch hier bemerkt Misrachi, dafs, wenn von einem Vielfachen oder von einem Bruchteile einer gesuchten Quadratzahl die Rede ist, man durch Division oder durch Multiplikation die Aufgabe auf die oben gelöste zurückführt.

Weiter giebt er noch folgende Lösung der oben behandelten Aufgabe, die wir $x^2 + 21 = 10x$ schreiben: Multipliziere die Anzahl der Wurzeln mit sich selbst, das giebt 100; dann multipliziere 100 mit 21, das giebt 2100, und diese Zahl merke dir. Weiter multipliziere die Hälfte dessen, was bei der Multiplikation der Anzahl der Wurzeln mit sich selbst herauskommt, d. i. 50, mit sich selbst; das giebt 2500. Davon ziehe die gemerkte Zahl ab; da bleibt 400 übrig. Die Wurzel dieser Zahl ist 20; das ziehe von 50 — d. i. der Hälfte dessen, was bei der Multiplikation der Anzahl der Wurzeln mit sich selbst herauskommt — ab. Da bleibt 30 übrig. Davon ziehe die mit der Quadratzahl verbundene Zahl 21 ab; dann bleibt 9, und das ist die gesuchte Quadratzahl, ihre Wurzel ist 3.

52. Welches ist die Quadratzahl, welche dem Dreifachen ihrer Wurzel und 4 gleich ist? [Mohammed ben Musa, S. 19; Alkarkhî, Kâfî fîl Hisâb III, S. 13; Johannes Hispalensis, S. 113.]

---

[1]) Dafs es in diesem Falle zwei reelle positive Wurzeln giebt, ist Misrachi entgangen; die Araber geben beide an.

Lösung. Nimm die halbe Anzahl der Wurzeln und multipliziere sie mit sich selbst; das giebt $2^1/_4$; addiere dies zu der mit der Anzahl der Wurzeln verbundenen Zahl, d. i. 4; da kommt $6^1/_4$ heraus. Daraus ziehe die Wurzel; das giebt $2^1/_2$. Diese Zahl addiere zur halben Anzahl der Wurzeln; da erhältst du 4; das ist die Wurzel der gesuchten Zahl, und ihr Quadrat 16 ist die gesuchte Quadratzahl selbst. Oder ein anderer Weg: Multipliziere die Zahl der Wurzeln mit sich selbst; da kommt 9 heraus. Das multipliziere mit 4; das giebt 36, und diese Zahl merke dir. Weiter nimm die Hälfte von dem, was bei der Multiplikation der Anzahl der Wurzeln mit sich selbst herauskommt, das giebt $4^1/_2$. Das multipliziere mit sich selbst, da kommt $20^1/_4$ heraus; dies addiere zu der Zahl, die du dir gemerkt hast; das giebt $56^1/_4$. Daraus ziehe die Wurzel, das ist $7^1/_2$. Hierzu addiere die Hälfte dessen, was bei der Multiplikation der Anzahl der Wurzeln mit sich selbst herauskommt, d. i. $4^1/_2$, und aufserdem noch die Zahl 4. Da kommt 16 heraus, und das ist die gesuchte Quadratzahl.

Wenn die Quadratzahl vervielfacht oder geteilt ist, so mufst du die Aufgabe wie oben auf ein Quadrat zurückführen.

53. Wie findet man das Doppelte oder das Dreifache oder irgend ein anderes Vielfaches der Wurzel einer Quadratzahl, ohne dafs man die Wurzel selbst kennt, d. h. wie findet man das Vielfache der Wurzel, ohne erst die Wurzel zu bestimmen und nachher ihr Vielfaches? Wieviel ist z. B. das Vierfache der Wurzel von 9?

Lösung. Wir multiplizieren die Vervielfachungszahl mit sich selbst; das giebt 16; dann multiplizieren wir 16 mit 9, welches die Quadratzahl ist, und erhalten 144. Die Wurzel daraus ist 12, und das kommt heraus, wenn wir die Wurzel von 9 mit 4 multiplizieren.

54. Wie findet man die Quadratzahl, deren Wurzel gleich dem Doppelten oder dem Dreifachen oder einem beliebigen anderen Vielfachen der Wurzel irgend einer Quadratzahl ist? Man soll aber nicht erst die Wurzel und dann das Vielfache der Wurzel bestimmen, sondern es soll durch eine Rechnung alles richtig herauskommen.

55. Wie findet man $^1/_2$ oder $^1/_3$ oder $^1/_4$ der Wurzel einer Quadratzahl, ohne zuerst die Wurzel zu bestimmen?

56. Wie findet man die Quadratzahl, deren Wurzel gleich $^2/_3$ der Wurzel von 9 ist, ohne dafs man erst die Wurzel von 9 nimmt und sie mit $^2/_3$ multipliziert?

57. Wie findet man die Quadratzahl, deren Wurzel gleich dem ist, was herauskommt, wenn man die Wurzel irgend einer Quadratzahl mit der Wurzel irgend einer anderen Quadratzahl multipliziert? Man soll aber nicht erst die Wurzeln bestimmen, sie dann multiplizieren und nun erst das Quadrat berechnen.

58. Wie findet man die Quadratzahl, deren Wurzel gleich dem ist, was bei der Multiplikation des Doppelten oder eines anderen Vielfachen der Wurzel einer Quadratzahl mit dem Doppelten oder einem anderen Vielfachen der Wurzel einer anderen Quadratzahl herauskommt? Man soll aber nicht erst die Wurzeln der Quadratzahlen, dann die Vielfachen derselben, dann das Produkt der Vielfachen bestimmen und dies Produkt mit sich selbst multiplizieren, sondern die Antwort soll richtig durch eine Rechnung herauskommen.

59. Wie finden wir die Quadratzahl, deren Wurzel gleich dem ist, was herauskommt bei der Multiplikation eines Bruchteils oder mehrerer Bruchteile der Wurzel einer Quadratzahl mit einem Bruchteil oder mehreren Bruchteilen der Wurzel einer anderen Quadratzahl, ohne dafs wir erst die Wurzeln finden, dann die Bruchteile derselben nehmen, darauf die Bruchtheile multiplizieren und endlich das Quadrat des Produktes nehmen, sondern wir sollen durch eine Rechnung alles richtig herausbringen.

60. Wie findet man, was herauskommt bei der Division der Wurzel einer Quadratzahl durch die Wurzel einer anderen Quadratzahl, ohne dafs man erst die Wurzeln bestimmt und dann die eine in die andere dividiert?

61. Wie findet man, was herauskommt bei der Division des Doppelten oder eines anderen Vielfachen der Wurzel einer Quadratzahl durch ein Vielfaches der Wurzel einer anderen Quadratzahl, ohne dafs man erst die Wurzeln, dann ihre Vielfachen bestimmt und darauf dividiert?

62. Wie findet man, was herauskommt bei der Division eines oder mehrerer Bruchteile der Wurzel einer Quadratzahl durch einen oder mehrere Bruchteile der Wurzel einer anderen Quadratzahl, ohne erst die Wurzeln, dann ihre Bruchteile zu bestimmen und darauf zu dividieren?

63. Wie findet man die Quadratzahl, deren Wurzel gleich der Summe der Wurzeln zweier Quadratzahlen ist, ohne dafs man diese Wurzeln selbst kennt?

64. Wie findet man die Quadratzahl, deren Wurzel gleich der Summe ist, die herauskommt, wenn man das Doppelte oder ein anderes Vielfaches der Wurzel einer Quadratzahl zum Doppelten oder einem anderen Vielfachen der Wurzel einer anderen Quadratzahl addiert? Man soll aber nicht erst die Wurzeln, dann ihre Vielfachen und dann die Summe dieser Vielfachen berechnen.

65. Wie findet man die Quadratzahl, deren Wurzel gleich der Summe ist, die herauskommt bei der Addition eines oder mehrerer Bruchteile der Wurzel einer Quadratzahl zu einem oder mehreren Bruchteilen der Wurzel einer anderen Quadratzahl? Man soll aber nicht erst die Wurzeln, dann die Summe der Bruchteile und dann das Quadrat dieser Summe bilden.

66. Wie findet man die Quadratzahl, deren Wurzel gleich der Differenz der Wurzeln zweier Quadratzahlen ist, ohne dafs man diese Wurzeln selbst kennt?

67. Wie findet man die Quadratzahl, deren Wurzel gleich der Differenz ist, die entsteht, wenn man das Doppelte oder ein anderes Vielfaches der Wurzel einer Quadratzahl vom Doppelten oder einem anderen Vielfachen der Wurzel einer anderen Quadratzahl subtrahiert? Man soll aber nicht erst die Wurzeln, dann ihre Vielfachen und zuletzt das Quadrat des Restes bestimmen.

68. Wie findet man die Quadratzahl, deren Wurzel gleich der Differenz ist, die sich ergiebt, wenn man einen oder mehrere Bruchteile der Wurzel einer Quadratzahl von einem oder mehreren Bruchteilen der Wurzel einer anderen Quadratzahl subtrahiert? Man soll aber nicht erst die Wurzeln, dann die Bruchteile, dann die Differenz der Bruchteile und endlich das Quadrat der Differenz bestimmen.

69. Es soll 10 oder irgend eine andere Zahl so in zwei verschiedene Teile geteilt werden, dafs das Quadrat des gröfseren Teils gleich dem Produkte beider Teile sei, oder gleich diesem Produkte, vermehrt um einen Bruchteil desselben, oder gleich einem um einen Bruchteil vermehrten Vielfachen des Produktes, oder gleich einem Bruchteil des Produktes? [Mohammed ben Musa, S. 35; Leonardo Pisano I, S. 410.]

70. Es soll 10 oder irgend eine andere Zahl so in zwei verschiedene Teile geteilt werden, daſs, wenn wir den gröſseren Teil durch den kleineren dividieren, der Quotient gleich 6 oder 7 oder gleich irgend einer anderen Zahl sei. [Mohammed ben Musa, S. 37; Leonardo Pisano I, S. 410.]

71. Es soll 10 oder irgend eine andere Zahl so in zwei Teile geteilt werden, daſs das Quadrat der ganzen Zahl $6\frac{1}{4}$ mal soviel als das Quadrat des einen der beiden Teile oder irgend ein Vielfaches dieses Quadrates sei. [Mohammed ben Musa, S. 36; Leonardo Pisano I, S. 410.]

72. Es soll 10 oder irgend eine andere Zahl so in zwei Teile geteilt werden, daſs das Quadrat des gröſseren Teils $2\frac{1}{4}$ mal soviel wie das Quadrat des kleineren Teils oder irgend ein anderes Vielfaches dieses Quadrates sei.

73. Es soll 10 oder irgend eine andere Zahl so in zwei verschiedene Teile geteilt werden, daſs das Quadrat des gröſseren Teils gleich dem Produkte ist, das wir erhalten, wenn wir den kleineren Teil mit 9 oder 10 oder irgend einer anderen Zahl multiplizieren. [Mohammed ben Musa, S. 47; Leonardo Pisano I, S. 410; Christoff Rudolff, S. 677.]

74. Es soll 10 oder irgend eine andere Zahl so in zwei verschiedene Teile geteilt werden, daſs das Produkt des kleineren Teils in den gröſseren gleich 21 oder gleich irgend einer anderen Zahl sei. [Mohammed ben Musa, S. 41.]

75. Es soll eine Zahl von der Beschaffenheit gefunden werden, daſs, wenn man 8 oder irgend eine andere Zahl dazu addiert und die Summe mit 4 oder einer anderen Zahl multipliziert, das Produkt gleich dem Quadrate der Zahl sei.

76. Ein König schickt nach einem Orte einen Läufer aus, der jeden Tag 10 Mil geht. Zu gleicher Zeit schickt er einen anderen Läufer ab, der den ersten Tag 1, den zweiten Tag 2, den dritten Tag 3, u. s. w. Mil zurücklegt. Wann wird der zweite den ersten einholen? [Alkarkhî, Fakhrî, S. 82; Leonardo Pisano I, S. 168; mathematische Scherzaufgaben 8; Nicolas Chuquet, probl. 98; Christoff Rudolff, S. 571.]

77. Jemand hat seine Güter unter seine Söhne geteilt und verordnet, daſs der erste von dem Gelde zuerst ein Goldstück und dann $\frac{1}{10}$ des Restes erhalten solle; von dem, was der erste übrig gelassen, solle der zweite 2 Goldstücke und dann noch $\frac{1}{10}$ des Restes erhalten; von dem, was der zweite noch übrig

gelassen, solle der dritte 3 Goldstücke und dann noch $^1/_{10}$ des Restes nehmen; und in dieser Weise solle es weiter gehen, und der letzte der Söhne solle alles erhalten, was die anderen übrig gelassen haben. Wenn wir nun finden, dafs alle Söhne gleichviel erhalten haben, wieviel Geld war dann vorhanden, und unter wieviel Söhne wurde es geteilt? [Leonardo Pisano I, S. 279; Maximus Planudes, S. 55; Nicolas Chuquet, probl. 129; Johannes Widmann, fol. 97; Christoff Rudolff, S. 415; vielleicht nachgebildet der Aufgabe VI im Anhang zu Nicomachi Geraseni introductionis arithmeticae, libri II, ed. R. Hoche, Leipzig 1866, S. 153.]

Lösung. Ziehe 1 von dem Nenner des Bruches — hier 10 — ab; was übrig bleibt — hier 9 —, ist die Anzahl der Söhne, das Quadrat dieser Zahl — hier 81 — die Anzahl der Goldstücke.

Misrachi löst dieselbe Aufgabe noch einmal unter der Voraussetzung, dafs statt $^1/_{10}$ der Bruch $^1/_7$ genommen wird, wo sich dann 6 Söhne und 36 Goldstücke ergeben.

78. Welche Zahl läfst 1 übrig bei der Division durch 2 ferner 2 bei der Division durch 3, 3 bei der Division durch 4, ebenso 4 bei der Division durch 5 und 5 bei der Division durch 6, endlich Null bei der Division durch 7? [Aufgaben wie diese und die beiden folgenden in: „Die Arithmetik der Chinesen“, S. 77; Leonardo Pisano I, S. 281.]

Misrachi zeigt, dafs die fünf ersten Bedingungen durch die Zahl $60 - 1$ erfüllt werden, da 60 die kleinste Zahl ist, welche die Divisoren 2, 3, 4, 5, 6 enthält. Um nun noch der letzten Bedingung, dafs die Zahl durch 7 teilbar sei, zu genügen, bestimmt er die Zahl, mit welcher man den Rest der Division von 60 durch 7, d. i. 4, multiplizieren mufs, damit das um 1 verringerte Produkt durch 7 teilbar sei. Er erhält 2, da $4.2 - 1 = 7$ ist. Als gesuchte Zahl ergiebt sich also $60.2 - 1 = 119$.

Ebenso ermittelt er weiter die Zahl, welche für die Divisoren 2, 3, 4, 5 beziehungsweise die Reste 1, 2, 3, 0 giebt.

79. Welche Zahl läfst bei der Division durch 2, 3, 4, 5, 6 jedesmal den Rest 1, während bei der Division durch 7 nichts übrig bleibt? [301.]

Welche Zahl läfst bei der Division durch 2, 3, 4 den Rest 1, bei der Division durch 5 den Rest Null?

Lösung. Wir suchen die kleinste Zahl, welche 2, 3, 4 enthält, und das ist 12. Dann dividieren wir 12 durch 5, nehmen

den Rest der Division, d. i. 2, und sehen, womit wir denselben multiplizieren müssen, damit das Produkt, wenn 1 dazu addiert wird, durch 5 teilbar sei. Wir finden, dafs das 2 ist, denn 2 mal 2 ist 4, und $4 + 1 = 5$ geht durch 5 auf. Deshalb multiplizieren wir 12 mit 2, das giebt 24, zählen 1 hinzu, das giebt 25, und dies ist die gesuchte Zahl.

80. Welche Zahl giebt, wenn sie durch 2 geteilt wird, den Rest 1, durch 3 den Rest 2, durch 4 den Rest 3, durch 5 den Rest 1, durch 6 den Rest 5, durch 7 den Rest 1, durch 8 den Rest 7, durch 9 den Rest 8, durch 10 den Rest 1? [71.]

Weiter bestimmt Misrachi 500 als die Zahl, welche bei der Division durch

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

beziehungsweise die Reste

0, 2, 0, 0, 2, 3, 4, 5, 0 giebt.

## II. Teil. Geometrische Aufgaben. 1. Kapitel. Aufgaben, die durch Regeldetri gelöst werden.

81. Ruben mietet den Simeon, dafs er ihm in seinem Weinberge 10 in die Länge und 5 in die Breite für 15 Peschutim grabe. Er hat 9 in die Länge und 4 in die Breite gegraben. Wieviel Lohn erhält er? [Mit anderen Zahlen Abraham ibn Esra, S. 55.]

82. Wie bestimmt man ohne direkte Messung die Höhe eines Gegenstandes, der auf der Erdoberfläche senkrecht steht? [Ähnlich behandelt in Gerbert, S. 435 ff.; Leonardo Pisano II, S. 202; Beha-eddin, S. 35.]

Misrachi löst die Aufgabe zunächst auf folgende Weise: Er setzt die Erdoberfläche an der Stelle, wo der Gegenstand steht, als eben voraus, stellt in der Nähe desselben eine Stange senkrecht auf und bringt das Auge an den Punkt der Erdoberfläche, welcher von der Verbindungslinie der Spitze des Gegenstandes mit der Spitze der Stange getroffen wird. Er mifst dann die Entfernung des Auges vom Fufspunkte des Gegenstandes und von dem der Stange, und hieraus, sowie aus der Höhe der Stange findet er mittels einer Proportion die Höhe des Gegenstandes.

Für den, welcher sich nicht die Mühe geben will, sein Auge an die Erdoberfläche zu bringen, schlägt er folgendes Verfahren

vor: Man soll sich so aufstellen, dafs das Auge in der Richtung der Linie ist, welche die Spitze des Gegenstandes mit der Spitze der Stange verbindet. Dann soll man die Entfernungen messen, in der man sich vom Fufspunkte des Gegenstandes und von dem der Stange befindet. Aus diesen beiden Entfernungen und aus der Differenz zwischen der Höhe der Stange und der des eigenen Körpers bestimmt er dann mittels einer Proportion die Differenz zwischen der Höhe des Gegenstandes und der des eigenen Körpers. Wird zu dieser Differenz die Höhe des Körpers addiert, so ergiebt sich die gesuchte Höhe.

Auf dieselbe Weise bestimmt Misrachi weiter die Höhe eines beliebigen Punktes des Gegenstandes über dem Boden und durch Subtraktion dieser Höhe von der Höhe der Spitze die Entfernung dieses Punktes von der Spitze. Ebenso bestimmt er die Höhen zweier verschiedenen Punkte des Gegenstandes und durch Subtraktion dieser Höhen die Entfernung der beiden Punkte von einander.

83. Die Länge einer beliebigen Ebene zu finden, ohne sie zu messen. [Ähnlich Gerbert, S. 436.]

Lösung. Wir stellen am Ende der Ebene eine beliebige Stange rechtwinklig auf, wählen auf derselben einen Punkt, der tiefer als die Spitze liegt, und bringen in demselben eine zweite Stange senkrecht zur ersten an. Diese zweite Stange machen wir so lang, dafs die gerade Linie, die von dem auf der Spitze der ersten Stange ruhenden Auge ausgeht, drei Punkte trifft, nämlich diese Spitze, das Ende der zweiten Stange und das Ende der Ebene, deren Länge gesucht wird. Dann messen wir die Länge von der Spitze der ersten Stange bis zu dem Punkte, wo die zweite Stange anfängt, und merken sie uns. Weiter messen wir die Länge der ganzen ersten Stange und merken sie uns gleichfalls. Endlich messen wir die Länge der zweiten Stange und merken sie uns. Nun schliefsen wir und sagen: Wenn die erste Zahl, die wir uns gemerkt haben, der zweiten entspricht, wieviel entspricht dann der dritten? Und was herauskommt, ist die Länge der Ebene.

84. Wie bestimmt man die Tiefe eines Teiches, ohne sie zu messen?

Lösung. Wir stellen am Rande des Teiches senkrecht zur Erde eine gerade Stange auf und bringen unten senkrecht zu ihr eine zweite Stange an, die wir so lang machen, dafs die

gerade Linie, von dem auf der Spitze der ersten Stange ruhenden Auge nach dem Ende der zweiten Stange gezogen, auch den tiefsten Punkt des Teiches trifft. In dem Punkte des Teiches, welchen der Zuschauer so erblickt, stellen wir rechtwinklig noch eine dritte Stange auf, deren Spitze bis an die Oberfläche des Wassers geht. Dann messen wir die Länge der zweiten Stange von der Spitze bis zu dem Punkte, den sie mit der ersten Stange gemeinsam hat, und merken sie uns. Weiter messen wir die Entfernung der Spitze der zweiten von dem oberen Ende der im Wasser stehenden Stange und merken sie uns auch. Endlich messen wir die Länge der ersten Stange und merken sie uns. Nun schliefsen wir und sagen: Wenn die erste der drei Zahlen, die wir uns gemerkt haben, der zweiten entspricht, wem entspricht dann die dritte? Was herauskommt, ist die gesuchte Tiefe.

85. Jemand mietet einen Arbeiter, der ihm einen Graben von 10 in der Länge, 8 in der Breite und 9 in der Tiefe für 10 Lebanim graben soll. Der Arbeiter gräbt 9 in der Länge, 7 in der Breite und 8 in der Tiefe. Wieviel Lohn erhält er? [Mit anderen Zahlen Abraham ibn Esra, S. 55.]

86. Wenn man eine Kugel, die aus Gold und Silber besteht, vor dich gebracht hat, wie kannst du dann bestimmen, wieviel Gold und wieviel Silber darin ist, ohne sie auf dem Prüfsteine zu untersuchen?

87. Ein Stein von der Länge 2, der Breite 1 und der Höhe 3 bewegt sich mit gleichmäfsiger Geschwindigkeit von oben nach unten in einen vollen Wasserbehälter, dessen Länge 10, Breite 5 und Tiefe 15 ist. In den Behälter führt eine Röhre, die ihn, wenn nichts ausströmt, in $1^1/_2$ Tagen zu füllen im stande ist. Ferner ist am Boden des Behälters eine Öffnung, durch welche derselbe, wenn kein Wasser zuströmt, in einem Tage geleert wird. In dem Augenblicke, wo die untere Fläche des Steines auf die Oberfläche des Wassers trifft, werden beide Röhren geöffnet, und der Stein dringt so in das Wasser ein, dafs der Behälter voll bleibt, wie im Anfange, ohne dafs Wasser überläuft. Wieviel Zeit vergeht von dem Augenblicke an, wo die untere Fläche des Steines die Oberfläche des Wassers berührt, bis zu dem Augenblicke, wo die obere Fläche des Steines mit der Oberfläche des Wassers in einer Ebene liegt, während der Behälter noch ganz voll ist? [Ähnlich Leonardo Pisano I, S. 403.]

Misrachi will also bestimmen, wie lange es dauert, bis die Differenz zwischen dem Volumen des ausfliefsenden und dem des einströmenden Wassers genau gleich dem Volumen des Steines, also gleich $2.1.3 = 6$ oder, da der Behälter das Volumen $10.5.15 = 750$ hat, $^6/_{750} = {}^1/_{125}$ des ganzen Behälters ist. Die Röhre, welche in den Behälter führt, würde denselben in $1^1/_2$ Tagen füllen, liefert also in einem Tage $^2/_3$ der Wassermasse, während die Ausflufsöffnung in einem Tage die ganze Wassermasse ausströmen läfst. In einem Tage = 12 Stunden ist danach die Differenz zwischen dem Volumen des ausströmenden und dem des einfliefsenden Wassers gleich $1 - {}^2/_3 = {}^1/_3$ des Behälters, oder die Wassermasse nimmt um $^1/_3$ in 12, also um $^1/_{125}$ in $^{36}/_{125}$ Stunden ab.

Es kommen bei dieser Aufgabe fünf Gröfsen in Betracht: das Volumen des Steines; das Volumen des Behälters; die Zeit, in welcher die Röhre den Behälter füllt; die Zeit, in welcher der Behälter durch die Öffnung entleert wird; die Zeit, in welcher das Volumen des Wassers sich um dasjenige des Steines vermindert. Da vier dieser Gröfsen die fünfte bestimmen, so läfst die Aufgabe vier Umkehrungen zu, die Misrachi sämtlich behandelt.

88. Ein Stein von der Länge 2, der Breite 1 und der Höhe 3 bewegt sich mit gleichmäfsiger Geschwindigkeit von oben nach unten in einen vollen Wasserbehälter, dessen Länge 10, Breite 5 und Tiefe 15 ist. In den Behälter führt eine Röhre, die ihn, wenn kein Wasser ausströmt, in $1^1/_2$ Tagen füllt; ferner ist am Boden eine Öffnung. Sobald die untere Fläche des Steines die obere Fläche des Wassers im vollen Behälter berührt, werden die Röhre und die Bodenöffnung geöffnet, und der Stein geht so in das Wasser hinein, dafs der Behälter immer voll bleibt und auch kein Wasser verschüttet wird. Der Stein senkt sich nun so lange, bis seine obere Fläche mit der Wasseroberfläche des noch vollen Behälters in einer Ebene liegt. Wenn dies nach Ablauf von $^{36}/_{125}$ einer Stunde geschieht, in welcher Zeit wird dann der Behälter durch die Öffnung am Boden geleert, wenn weder Wasser durch die Röhre einströmt, noch Regen hineinfällt?

89. Der erwähnte Stein geht in gleichmäfsiger Bewegung in den Behälter hinein, in welchen eine Röhre führt, und welcher durch die Öffnung am Boden in einem Tage geleert wird. Man öffnet die Röhre, sowie die Öffnung am Boden, und der Stein

dringt in gleichmäfsiger Bewegung in das Wasser ein. Wenn nun von dem Augenblicke, wo die untere Fläche des Steines die Oberfläche des Wassers berührt, bis zur Zeit, wo seine obere Fläche mit der Wasseroberfläche des noch vollen Behälters in einer Ebene liegt, $^{36}/_{125}$ einer Stunde vergehen, in welcher Zeit füllt dann die Röhre den Behälter?

90. Der erwähnte Behälter wird durch die Öffnung am Boden in einem Tage geleert und durch die Röhre, die hineinmündet, in $1^1/_2$ Tagen gefüllt. Der Stein senkt sich in gleichmäfsiger Bewegung, so dafs kein Wasser vergossen wird und der Behälter noch voll ist, wie er anfangs war. Wenn nun dieses Eindringen des Steines in das Wasser $^{36}/_{125}$ einer Stunde dauert, wie grofs ist dann das Volumen des Steines?

91. Der erwähnte Stein senkt sich in gleichförmiger Bewegung in den vollen Behälter, so dafs kein Wasser überfliefst und der Behälter voll bleibt, wie er im Anfange war. Die Röhre, die hineinführt, füllt den Behälter in $1^1/_2$ Tagen, wenn kein Wasser ausströmt, und die Öffnung am Boden leert ihn in einem Tage, wenn weder Wasser aus der Röhre, noch Regen hineinkommt. Wenn nun das Eindringen des Steines in das Wasser $^{36}/_{125}$ einer Stunde dauert, welches Volumen hat dann der Behälter?

## 2. Kapitel. Aufgaben, die ohne Regeldetri gelöst werden.

92. Eine Leiter von 10 Ellen Höhe ist so gegen eine Wand von ebenfalls 10 Ellen Höhe gelehnt, dafs ihr Ende vom Ende der Wand 2 Ellen entfernt ist. Wieviel Ellen sind dann vom Fufse der Leiter bis zu dem der Wand? [Abraham ibn Esra, S. 84; Leonardo Pisano I, S. 397; Luca Paciuolo II, fol. 54 verso; Christoff Rudolff, S. 591.]

Lösung. Von dem Punkte, wo sich das Ende der Leiter befindet, bis zum Fufse der Wand sind 8 Ellen. Wir nehmen nun das Quadrat von 8, d. i. 64, und ziehen diese Zahl von dem Quadrate der Zahl der Ellen der Leiter, d. i. 100, ab. Da bleibt 36 übrig. Die Wurzel daraus ist 6, und soviel Ellen ist der Fufs der Leiter vom Fufse der Wand entfernt.

93. Es sind zwei Türme da, der eine 60, der andere 40 Ellen hoch. Die Entfernung beider beträgt 50 Ellen. Auf der Spitze jedes Turmes sitzt ein Vogel, und zwischen beiden

Türmen befindet sich eine Quelle. Die Vögel fliegen in demselben Augenblicke mit gleicher Geschwindigkeit ab nach der Quelle hin, wo sie zugleich ankommen. Wie weit ist die Quelle vom Fuſse jedes der beiden Türme entfernt? [Alkarkhî, Kâfî fîl Hisâb III, S. 26; Leonardo Pisano I, S. 331 und 398; Christoff Rudolff, S. 503.]

Misrachi behandelt dieselbe Aufgabe dann noch für den Fall, daſs die Türme 50 und 40 Ellen hoch und 60 Ellen von einander entfernt sind.

94. Wie findet man aus dem Gewichte einer Kugel den Durchmesser derselben?

Zum Verständnis der Lösung, die Misrachi giebt, ist folgendes vorauszuschicken: Bekanntlich haben gleiche Volumina verschiedener Körper verschiedenes Gewicht, und wir verstehen unter dem specifischen Gewicht eines Körpers die Zahl, welche angiebt, wievielmal schwerer derselbe ist, als ein gleiches Volumen reines Wasser von 4° C. Statt auf Wasser könnten die verschiedenen Körper auch auf irgend einen anderen Stoff bezogen werden, und Misrachi, der hier nur Metalle vergleicht, wählt dazu das Gold. Das specifische Gewicht des Goldes ist, wenn die von dem Araber Alkhazini (1121) in seinem „Buch von der Wage der Weisheit“ gegebenen Zahlen zu Grunde gelegt werden, 19,05, das des Silbers 10,30. Wird daher das specifische Gewicht des Goldes gleich 1 gesetzt, so wird das des Silbers $10{,}3 : 19{,}05 = 0{,}54$ sein. Ebenso ergiebt sich für Zinn 0,37, für Blei 0,59, für Eisen 0,40, für Kupfer 0,45, und das sind die Zahlen, welche Misrachi benutzt.

Nun ist das Volumen der Kugel $^4/_3\, r^3\, \pi$, oder, wenn $r$ durch $\frac{d}{2}$ ersetzt und $\pi = 3^1/_7$ angenommen wird, $^{11}/_{21}\, d^3$, somit das Gewicht $^{11}/_{21}\, d^3 s$, wo $s = 1$ zu setzen ist, wenn die Kugel aus Gold besteht, während für eine silberne Kugel $s = 0{,}54$ angenommen werden muſs, u. s. w. Wird daher das Gewicht $p$ genannt, so besteht die Gleichung $^{11}/_{21}\, d^3 s = p$, und mittels dieser Gleichung löst Misrachi die vorliegende, sowie auch die folgende Aufgabe.

95. Wie findet man aus dem Durchmesser einer Kugel das Gewicht derselben?

96. Wie findet man aus dem Gewichte eines Würfels das Gewicht der einbeschriebenen Kugel (von demselben Stoffe)?

Lösung. Nimm $^{11}/_{21}$ vom Gewicht des Würfels; das ist das Gewicht der Kugel. Wenn z. B. der Würfel 343 Dirhem wiegt, so wiegt die Kugel $179^{2}/_{3}$ Dirhem.

Wie findet man aus dem Gewichte einer Kugel das Gewicht des umbeschriebenen Würfels?

Lösung. Nimm $^{10}/_{11}$ vom Gewichte der Kugel und addiere es zu diesem Gewichte; was herauskommt, ist das Gewicht des umgebenden Würfels.

Hat z. B. die Kugel das Gewicht $179^{2}/_{3}$, so findet Misrachi als Gewicht des Würfels 343.

97. Wie findet man das Gewicht der Kugel aus dem Gewichte des einbeschriebenen Würfels?

Lösung. Nimm das Dreifache des Quadrates der Würfelseite, und merke es dir. Darauf ziehe die Wurzel aus dieser ersten Zahl, die du dir gemerkt hast, und merke sie dir auch. Dann nimm die erste Zahl, die du dir gemerkt hast, $3^{1}/_{7}$ mal und multipliziere das, was herauskommt, mit $^{1}/_{6}$ der zweiten Zahl, die du dir gemerkt hast. Was herauskommt, ist das Gewicht der umgebenden Kugel.

Wie findet man das Gewicht des Würfels aus dem Gewichte der umbeschriebenen Kugel?

Lösung. Nimm $^{1}/_{3}$ des Quadrates des Kugeldurchmessers, und merke es dir. Dann ziehe die Wurzel aus dem, was du dir gemerkt hast, und multipliziere sie mit dem, was du dir gemerkt hast. Was herauskommt, ist das Gewicht des umgebenden Würfels.

Als Beispiel nimmt Misrachi als Gewicht des Würfels 8 Dirhem an und erhält für die umbeschriebene Kugel $21^{47}/_{60}$ Dirhem. Umgekehrt geht er von $21^{47}/_{60}$ als Gewicht der Kugel aus und findet als Gewicht des einbeschriebenen Würfels 8 Dirhem.

98. Das Gewicht eines Würfels beträgt 512 Dirhem. Jemand kommt und sägt an den Seiten so ab, dafs der übrig bleibende Körper acht Seitenflächen hat, die langgestreckte Vierecke sind, während die obere und die untere Grundfläche Achtecke mit gleichen Kanten und gleichen Winkeln sind. Wieviel hat der Würfel an Gewicht verloren?

Darauf kommt noch jemand und sägt an den Seiten so ab, dafs eine runde Säule entsteht, deren Grundfläche ein Kreis ist, und bei der die Grundflächen und die Dicke gleich sind. Wieviel hat dann der vorhergehende Körper an Gewicht verloren?

Zuletzt kommt noch jemand und sägt von allen Seiten so ab, dafs eine Kugel übrig bleibt. Wieviel hat dann der vorhergehende Körper an Gewicht verloren?

99. Ein Baum ist 10 Ellen hoch. Es kommt ein starker Wind und zerbricht ihn in zwei Teile; aber die Teile werden nicht getrennt, sondern der eine hängt von der Bruchstelle herunter, und seine Spitze ruht auf dem Boden. Die Entfernung von der Spitze zur Wurzel beträgt 5 Ellen. Wieviel Ellen sind von der Spitze des Baumes bis zur Stelle, wo er gebrochen ist? [Arithmetik der Chinesen, S. 76; Bháscara, S. 64 u. 203.]

100. Eine Lanze ist ins Wasser gesteckt; ihre Spitze ragt über das Wasser hinaus, und ihr Ende steckt im Boden des Wassers. Die Tiefe des Wassers ist unbekannt. Wie können wir die Länge des im Wasser befindlichen Teiles der Lanze bestimmen? [Ähnlich Arithmetik der Chinesen, S. 76; Alkarkhî, Kâfî fîl Hisâb III, S. 26; Bháscara, S. 66 u. 204; Behaeddin, S. 53.]

Lösung. Wir bewegen die Spitze der Lanze nach der rechten Seite, bis sie die Wasserfläche trifft, und dort machen wir uns ein Zeichen. Dann neigen wir die Lanze auf die linke Seite, bis ihre Spitze die Wasserfläche trifft, und machen dort ein zweites Zeichen. Hierauf nehmen wir die Hälfte der Entfernung beider Zeichen von einander und merken sie uns. Den Teil der Lanze, der (weil über dem Wasser befindlich) gesehen werden kann, nehmen wir gleich 1 Elle an, und danach bestimmen wir die Entfernung, die wir uns gemerkt haben, so dafs wir wissen, wie viele Ellen es in diesem neuen Mafse sind. Die Zahl dieser Ellen multiplizieren wir mit sich selbst, addieren zum Produkt 1, nehmen die Hälfte der Summe, ziehen von derselben 1 ab, und was übrig bleibt, ist die Zahl der Ellen der Lanze, die im Wasser bis zum Boden stecken.

Verlag von Friedrich Vieweg & Sohn in Braunschweig.

## Compendium der höheren Analysis.

Von **Dr. Oskar Schlömilch,**

K. S. Geheimrath a. D., Mitglied der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, der Königlich Schwedischen Akademie zu Stockholm, der Kaiserlich Leopoldinischen Akademie etc.

In zwei Bänden. Mit Holzstichen. gr. 8. geh.

Erster Band. Fünfte verbesserte Auflage. Preis 9 ℳ.

Zweiter Band. Vierte Auflage. Preis 9 ℳ.

## Vorlesungen über Zahlentheorie

von **P. G. Lejeune-Dirichlet.**

Herausgegeben und mit Zusätzen versehen von

**R. Dedekind,**

Professor an der technischen Hochschule Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig.

**Vierte umgearbeitete und vermehrte Auflage.**

gr. 8. geh. Preis 14 ℳ.

## Stetigkeit und irrationale Zahlen.

Von **Richard Dedekind,**

Professor der Mathematik an der technischen Hochschule zu Braunschweig.

**Zweite unveränderte Auflage.**

gr. 8. geh. Preis 1 ℳ.

## Was sind und was sollen die Zahlen?

Von **Richard Dedekind,**

Professor der Mathematik an der technischen Hochschule zu Braunschweig.

**Zweite unveränderte Auflage.** 8. geh. Preis 1 ℳ 60 ₰

**Lehrbuch**

der

## Differential-Gleichungen

von **Dr. Andrew Russell Forsyth,**

Professor am Trinity College zu Cambridge.

Mit einem Anhange: Die Resultate der im Lehrbuche angeführten Uebungsaufgaben enthaltend,

herausgegeben von **H. Maser.**

**Autorisirte Uebersetzung.** gr. 8. geh. Preis 14 ℳ.

## Sammlung von Formeln

der reinen und angewandten

## Mathematik

von **Dr. W. Láska.**

Mit drei Tafeln. gr. 8. Preis geh. 26 ℳ., in Halbfranz geb. 28 ℳ.

Verlag von Friedrich Vieweg & Sohn in Braunschweig.

## Das graphische Einmaleins

oder die Rechentafel, ein Ersatz für den Rechenschieber, entworfen von **Gustav Herrmann,**

Geh. Reg.-Rath und Professor an der Königl. technischen Hochschule zu Aachen.

8. geh. Preis 1 ℳ. 20 ₰

## Lehrbuch der praktischen Geometrie

von **Dr. Ch. August Vogler,**

Professor an der landwirthschaftlichen Hochschule zu Berlin.

Erster Theil: **Vorstudien und Feldmessen.** Mit 248 Holzstichen und 10 Tafeln. gr. 8. geh. Preis 16 ℳ.

Zweiter Theil: **Höhenmessungen.** Erster Halbband. Anleitung zum Nivelliren oder Einwägen. Mit 90 Holzstichen, 4 Nachbildungen durch Zinkätzung und 5 Tafeln. gr. 8. geh. Preis 11 ℳ.

## Grundzüge der Ausgleichungsrechnung.

Elementar entwickelt von

**Dr. Ch. August Vogler,**

Professor an der landwirthschaftlichen Hochschule zu Berlin.

gr. 8. geh. Preis 6 ℳ.

## Lehrbuch der politischen Arithmetik

für höhere Handelsschulen (Handelsakademien) und zum Selbstunterricht bearbeitet von

**F. S. Holzinger,**

Professor an der öffentlichen Handelsakademie in Linz.

gr. 8. geh. Preis 3 ℳ. 50 ₰

Die

## Fundamentaltheorieen der neueren Geometrie

und die Elemente der Lehre von den Kegelschnitten für den Schulunterricht bearbeitet von

**H. Seeger.**

Mit 60 Holzstichen. gr. 8. geh. Preis 2 ℳ. 80 ₰

## Gauss.

Ein Umriss seines Lebens und Wirkens.

Von **F. A. T. Winnecke.**

Festschrift zu Gauss' hundertjährigem Geburtstage am 30. April 1877, herausgegeben durch den Verein für Naturwissenschaft zu Braunschweig.

Mit einem Bildnisse Gauss'. gr. 8. geh. Preis 60 ₰

Verlag von Friedrich Vieweg & Sohn in Braunschweig.

# Lehrbuch der Algebra.

Von **Heinrich Weber,**

Professor der Mathematik an der Universität Strassburg.

In zwei Bänden.

**Erster Band.** Mit 28 eingedruckten Abbildungen. gr. 8. geh. Preis 16 ℳ.

**Zweiter Band.** gr. 8. geh. Preis 20 ℳ.

## Fünfstellige logarithmische und trigonometrische Tafeln.

Herausgegeben von

**Dr. O. Schlömilch,**

K. S. Geheimerath a. D.,

Mitglied der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, der Königl. Schwedischen Akademie zu Stockholm, der Kaiserl. Leopoldinischen Akademie etc.

Galvanoplastische Stereotypie. Wohlfeile Schulausgabe.

**Zwölfte Auflage.** 8. geh. Preis 1 ℳ.

## Siebenstellige gemeine Logarithmen

der Zahlen von 1 bis 108000 und der Sinus, Cosinus, Tangenten und Cotangenten aller Winkel des Quadranten von 10 zu 10 Secunden nebst einer Interpolationstafel zur Berechnung der Proportionaltheile

von **Dr. Ludwig Schrön,**

Director der Sternwarte und Professor zu Jena, Mitgliede der Kaiserlich Leopold. Carolin. deutschen Akademie der Naturforscher und der gelehrten Gesellschaften zu Breslau, Frankfurt a. M., Halle und Jena.

Zweiundzwanzigste revidirte Stereotyp-Ausgabe. Imperial-Octav. geh.

Tafel I. und II. (Logarithmen der Zahlen und der trigonometrischen Functionen.) Preis 4 ℳ. 20 ₰

Tafel III. Interpolationstafel (Suppl. zu allen Logarithmentafeln). Preis 1 ℳ. 80 ₰

Tafel I. Die Logarithmen der Zahlen. (Für Solche, welche Tafeln für trigonometrische Rechnungen nicht nöthig haben.) Preis 2 ℳ. 40 ₰

Dasselbe Werk. **Englische Ausgabe.** Imperial-Octav. geh. Preis 6 ℳ.

Dasselbe Werk. **Französische Ausgabe.** Imp.-Octav. geh. Preis 6 ℳ.

Dasselbe Werk. **Holländische Ausgabe.** Imp.-Octav. geh. Preis 6 ℳ.

Dasselbe Werk. **Ungarische Ausgabe.** Imperial-Octav. geh. Preis 6 ℳ.

# Elliptische Functionen und algebraische Zahlen.

Akademische Vorlesungen

von

**H. Weber,**

Professor der Mathematik an der Universität Strassburg.

gr. 8. geh. Preis 13 ℳ.